红移

对光而言：$E \propto a(t)^{-1}$

$\downarrow$

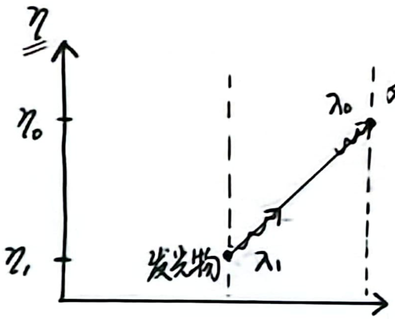
$\lambda \propto a(t)$

光一边传播，一边被"拉长"（源于宇宙膨胀）

• conformal time η

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)\, d\ell^2 \\ &= a^2(t)\left(-\frac{dt^2}{a^2(t)} + d\ell^2\right) \\ &= a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\ell^2\right) \end{aligned}$$



space χ（选取θ,φ，使光的测地线上 $\theta = const.$ $\varphi = const.$）

注意：$\eta_0 > \eta_1$

$d\ell^2 = d\chi^2$

接收到的波长

在宇宙膨胀下，$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\lambda_1 > \lambda_1$

发出时的波长

定义红移 z

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \Rightarrow 1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{1}{a(t_1)}$$

红移告诉我们什么？

告诉我们某个事件（发光的）发生于宇宙的什么时期.

eg. $z=1 \longrightarrow a(t) = \frac{1}{2}$（宇宙1/2大的时候）

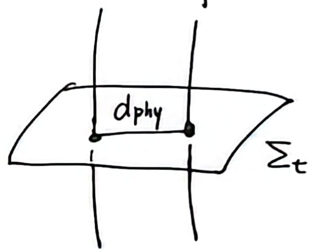
$z=2 \longrightarrow a(t) = \frac{1}{3}$

事件发生的时期可用红移z来标记.

$z = 1100$: CMB

$z \cong 10$: 第1个星系形成.

* 宇宙学观测中的距离.



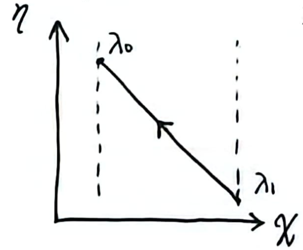
$d_{phy} = a(t)\chi$ 可观测吗？

不可，因为这两点是同一时间.

更具有实操意义的"距离"应考虑：① 宇宙在膨胀

② 光的到达需要时间

• 光度距离



null geodesic $\Rightarrow d\eta = d\chi$

共动距离

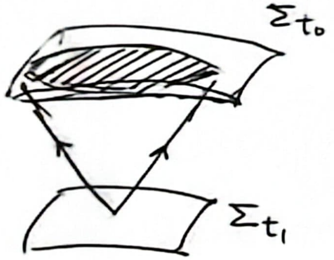
$$\chi(z) = \int_{\eta_1}^{\eta_0} d\eta = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

t_1对应的$z(t_1)$

利用 $1+z(t) = \frac{1}{a(t)} \Rightarrow dz = -\frac{\dot{a}}{a^2}dt = -H\frac{dt}{a}$

有

$$\chi(z) = \int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = -\int_{z_1}^{z_0 \to 0}\frac{dz}{H(z)} = \int_0^{z_1}\frac{dz}{H(z)}$$



L: 单位时间发光物发出的能量

F: 单位时间, 单位面积观察者接收到的能量.

考虑:

① $S = 4\pi a^2(t_0) S_k^2(\chi)$

$\mathbb{R}^3$中. $S = 4\pi d^2$

② 接收时, 能量衰减为 $\frac{a(t_1)}{a(t_0)}$ 倍,

即 $\frac{1}{1+z}$ 倍

③ 宇宙在膨胀导致接收率比起发射率下降了 $(1+z)^{-1}$

因此

$$F = \frac{L}{4\pi d_M^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$a(t_0)=1$, d_M就是$S_k(\chi)$

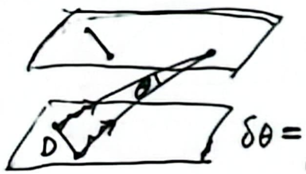
光度距离:

$$d_L(z) := (1+z)\, d_M(z)$$

依赖于$k=0,\pm1$的

• 角直径距离

$$d_A(z) = \frac{d_M(z)}{1+z}$$



$$\delta\theta = \frac{D}{a(t_1) d_M} = \frac{D}{d_A}$$

$a(t_1) = (1+z)^{-1}$

2.3 宇宙的动力学

求解$a(t)$ ← 舞台怎么动?

出发点:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \text{(引力场方程)}$$

有了FRW metric后, 求$G_{\mu\nu}$只是技术难.

什么样的$T_{\mu\nu}$与宇宙学原理自洽?

• 能动张量

$$T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T_{00} & V \\ \hline V & T_{ij} \end{array}\right)$$

*$SO(3)$ 各向同 → $V=0$

→ $T_{ij}(\vec{x}=0) \propto \delta_{ij} \propto g_{ij}$

$$T_{00} = \rho(t) c^2, \quad T_{ij} = P(t) g_{ij}(t, \vec{x})$$

均匀

升指标

$$T^0{}_0 = -\rho c^2 \qquad T^i{}_j = P(t)\,\delta^i{}_j$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}$$

理想流体

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$$

观者与流体的相对四速

连续性方程

- 粒子数密度

粒子数四矢量流 N^μ.

三标量

N^0: 粒子数密度(场)

N^i: x^i方向上的粒子数流

三矢量

与流体共动的观者看到: $N^0 \neq 0$

$N^i = 0$ (各向同)

宇宙的流体一般是要做 $T_{\mu\nu}$ 候选者的，故都是大尺度的"粒子"，它们和膨胀宇宙是共动的.

$$N^0 \equiv c\,\underline{\underline{n(t)}}$$

"粒子"(星系)的粒子数密度

均匀

一般观者看到的:

$$N^\mu = n U^\mu$$

- 共动: $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ ✓
- 一般: $U^\mu = \underline{\underline{\gamma}}(c, v^i)$

boost后, $N^0 = c(\underline{\underline{\gamma n}})$

$\gamma n > n$ (尺缩)

粒子数守恒: $\partial_\mu N^\mu = 0$ (SR)

$\nabla_\mu N^\mu = 0$ (GR)

FRW metric 下,

$$\partial_\mu N^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} N^\lambda$$

$\downarrow$ $N^i = 0$ (FRW metric是共动观者)

$$\frac{1}{c}\frac{dn}{dt} = -\Gamma^\mu{}_{\mu 0}\, n$$

$$= -\frac{3}{c}\frac{\dot{a}}{a} n$$

$$\Rightarrow n(t) \propto a^{-3} \quad \text{(膨胀导致粒子数密度}\downarrow\text{)}$$

- 能动张量.

诺特定理: 时空平移 $\longrightarrow$ 守恒流 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

弯曲时空中不复存在

($\nu = 0$ 时间, $\nu = i$ 空间)

理想流体:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (SR)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (GR)}$$

$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu$

$= \nabla_\mu (g_{\rho\nu} T^{\mu\rho})$

$= T^{\mu\rho} \nabla_\mu g_{\rho\nu} + g_{\rho\nu} \nabla_\mu T^{\mu\rho}$

$= 0$

$\nu = 0$ 的方程:

$$\partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0$$

$\downarrow$ $T^i{}_0 = 0$

$$\frac{1}{c}\frac{d(\rho c^2)}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\mu 0}(\rho c^2) - \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0$$

"能量守恒"

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + P/c^2\right) = 0}$$

连续性方程 $\nu = 0$

宇宙学中的流体：$\frac{P}{\rho c^2} = w$ （物态方程）

↓ 代入连续性方程

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}$$

物质：$P \ll \rho \to w=0 \to \rho \propto a^{-3}$

辐射：$P = \rho/3 \to w = \frac{1}{3} \to \rho \propto a^{-4}$

暗能量：$P = -\rho \Rightarrow w = -1 \to \rho = \text{const}.$

- 物质：$|P| \ll \rho c^2$（非相对论性气体）

$$\rho \propto a^{-3}$$

$\frac{E}{V}$：$E \to$ const，$V \to \propto a^3$

① Baryons（重子）

核子、电子等普通物质.（和粒子物理不同）

② 暗物质

热门候选者：WIMPs，axions，PBH …

interaction　weak　massive

- 辐射：$P = \frac{1}{3}\rho c^2$（相对论性）

$$\rho \propto a^{-4}$$

$\frac{E}{V}$：$E \to \propto a^{-1}$，$V \to \propto a^3$

① 很轻的粒子（早期的SM中的粒子）

② 光子

③ 中微子（最后开始像物质）　④ 引力子

- 暗能量：$P = -\rho c^2$

如今的宇宙由DE主导.（但不清楚是什么…）

$$\rho \propto a^0 = \text{const}.$$

Q：违背能量守恒？

A：不！"能量守恒"现在体现为 $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P/c^2) = 0$

① 真空能

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} c^2 g_{\mu\nu}$$

QFT预测的太大了.

② 宇宙学常数

$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

移项

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} \equiv -\rho_\Lambda c^2 g_{\mu\nu}$$

③ 暗能量

泛指 ~~w=-1~~ $w \approx -1$

标准宇宙学模型：ΛCDM model

DE　冷暗物质

速度不快

2.3.5 Friedmann Equations

$T_{\mu\nu}$处理好了，那么$G_{\mu\nu}$呢？

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

↓ 省略

$$\begin{cases} G^0_{\ 0} = -\frac{3}{c^2}\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2R_0^2}\right] \\ G^i_{\ j} = -\frac{1}{c^2}\left[2\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2R_0^2}\right]\delta^i_{\ j} \end{cases}$$

- $G_{\mu\nu}$和$T_{\mu\nu}$都准备好了，考虑$G^0_{\ 0} = \frac{8\pi G}{c^4} T^0_{\ 0}$，有

☆☆☆

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho}_{T^0_{\ 0}} - \frac{kc^2}{a^2R_0^2} \quad \text{(Friedmann Eq.)}$$

$G^0_{\ 0}$ 牛顿宇宙学?

关于ρ：全宇宙中各式各样的(大尺度)的能量密度之和。

- ρ
  - ρ_r (radiation)
    - ρ_γ (光子)
    - ρ_ν (中微子)
  - ρ_m (matter)
    - ρ_{CDM}
    - ρ_b (重子)
  - ρ_Λ (dark energy)

- 考虑 $^i_{\ j}$ 分量，$G^i_{\ j} = \frac{8\pi G}{c^4} T^i_{\ j}$，有

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad \text{第二 F. Eq}$$

*: $\frac{d}{dt}$(第一 F.E) 配上 连续性方程 ↗

第一 Friedmann Eq.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2R_0^2}$$

"物质"项　　曲率项(打破牛顿宇宙的局限)

critical density:

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

dimensionless density parameter:

$$\Omega_{i,0} := \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}} \quad (i = r, m, \Lambda, \cdots)$$

很多文献喜欢丢掉

改写 Friedmann Eq.

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{a^2R_0^2H_0^2}$$

$\rho_{c,0}^{-1}$

$$= \frac{8\pi G}{3H_0^2}(\rho_{r,0}a^{-4} + \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{\Lambda,0}) - \frac{kc^2}{a^2R_0^2H_0^2}$$

$$= \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_{k,0}a^{-2}$$

$$\Omega_{k,0} = -\frac{kc^2}{R_0^2H_0^2}$$

漏掉0

$$= \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda$$

取 $t = t_0$,

$$1 = \underbrace{\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda}_{\equiv \Omega_0} + \Omega_k \rightarrow \Omega_k = 1 - \Omega_0$$

精确解.

F.E.(单组分宇宙)

(考虑k=0)

$$H = H_0\sqrt{\Omega_i}\, a^{-\frac{3(1+w_i)}{2}}, \quad i = r/m/\Lambda \cdots$$

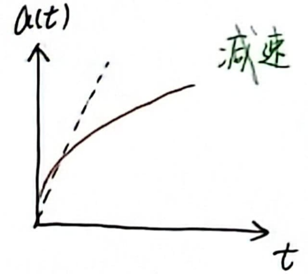
$$\Rightarrow \frac{\dot a}{a} = H_0\sqrt{\Omega_i}\, a^{-\frac{3}{2}(1+w_i)}$$

• 物质宇宙 ($w=0$)

$$\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\Omega_m}\, a^{-\frac{1}{2}}$$

$$d(a^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} H_0\sqrt{\Omega_m}\, dt$$

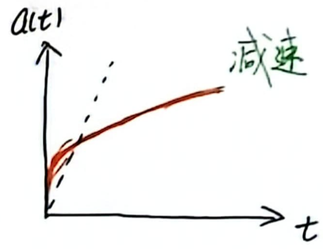
$$\Rightarrow a \propto t^{2/3}$$



• 辐射宇宙 ($w=\frac{1}{3}$)

$$\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\Omega_r}\, a^{-1}$$

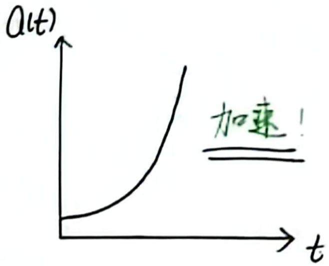
$$\Rightarrow a \propto t^{\frac{1}{2}}$$



• 暗能量宇宙($w=-1$)

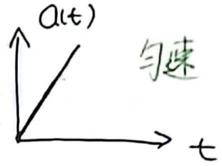
$$\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}\, a$$

$$\Rightarrow a \propto e^{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}\, t}$$



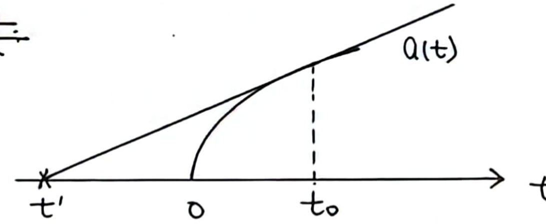
• 曲率宇宙 ($k<0 \Leftrightarrow \Omega_k > 0$)

$$a(t) \propto t$$



宇宙年龄问题.

~~上限~~



我觉得梁书的讨论不如Baumann的好.

$$t_0 - t' = \frac{a(t_0)}{a'(t_0)} = \frac{1}{H_0} > t_0$$

①纯物质宇宙

$$H_0 = \frac{\dot a(t_0)}{a(t_0)} = \frac{2}{3}\frac{1}{t_0} \quad (\text{平移求解})$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \approx 90\text{亿年} \quad \times$$

② 物质+Λ

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda \qquad \alpha \equiv \sqrt{\Omega_\Lambda}\, H_0$$

Prob 2.8

$$\Rightarrow a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}\alpha t\right)$$

早期: $a \propto t^{2/3}$, 晚期: $a \propto e^{\alpha t}$

若考虑r.m.Λ.k.预测的年龄为138亿年

年龄: $t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}\, H_0}\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}\right) \approx 140\text{亿年}$ 代入观测

~~平坦性疑难(简介)~~

物质+曲率宇宙

共形时间 $\eta(t)=\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \iff d\eta=\frac{dt}{a(t)}$

$$\dot a=\frac{da}{dt}=\frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}=\frac{a'}{a}$$

$$\ddot a=\frac{d\eta}{dt}\frac{d}{d\eta}(\dot a)=\frac{1}{a}\left(\frac{a''}{a}-\frac{(a')^2}{a^2}\right)=\frac{a''}{a^2}-\frac{(a')^2}{a^3}$$

代入两个 Friedmann Eqs.

物+曲
$$\begin{cases}(a')^2+\frac{kc^2}{R_0^2}a^2=\frac{8\pi G}{3}\rho_m a^4\\ a''+\frac{kc^2}{R_0^2}a=\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_m-\frac{3P}{c^2}\right)a^3\end{cases}$$

定义 $\mathcal{H}:=\frac{a'}{a}$

$$\begin{cases}\mathcal{H}^2+\frac{kc^2}{R_0^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho_m a^2 \quad (*)\\ \frac{d\mathcal{H}}{d\eta}=-\frac{4\pi G}{3}\rho_m a^2\end{cases}$$

这个方程跳了步，它用到了(*)消去了曲率部分.

消去 ρ_m 项，有

$$\mathcal{H}^2+2\frac{d\mathcal{H}}{d\eta}+\frac{kc^2}{R_0^2}=0$$

↓ 无量纲化 $\tilde{\mathcal{H}}=\frac{R_0}{c}\mathcal{H}$, $\theta=\frac{c}{R_0}\eta$

$$\tilde{\mathcal{H}}^2+2\frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{d\theta}+k=0$$

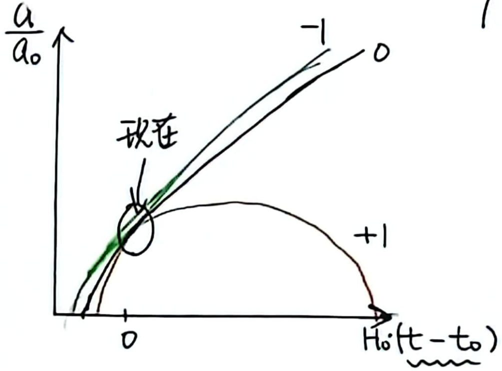
$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(\theta)=\begin{cases}\cot(\frac{\theta}{2}), & k=+1\\ 2/\theta, & k=0\\ \coth(\frac{\theta}{2}), & k=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a(\theta)=A\begin{cases}\sin^2(\theta/2), & k=+1\\ \theta^2, & k=0\\ \sinh^2(\theta/2), & k=-1\end{cases} \qquad (\theta\propto\eta)$$

积分常数

另外:

$$t(\theta)=\frac{R_0A}{2c}\begin{cases}\theta-\sin\theta, & k=+1\\ \theta^3, & k=0\\ \sinh\theta-\theta, & k=-1\end{cases}$$



得到了 a,t 的参数方程

$\Omega_0=1-\Omega_k=1+\frac{kc^2}{R_0^2H_0^2}$

若 $\Omega_0>1$ → 宇宙未来会坍缩

$\Omega_0\le 1$ → 宇宙会一直膨胀

* 局限于 m&k 宇宙.

观测给出: $\Omega_r\approx 9.0\times10^{-5}$, $\Omega_m\approx0.32$, $\Omega_\Lambda\approx0.68$, $|\Omega_k|<0.005$

$\Rightarrow \Omega_0\approx 1$ (宇宙很平 → 平坦性疑难)