Beyond Equilibrium

在前面提到大质量粒子在低温时密度呈指数下降

$N_i \equiv \frac{n_i}{s} \sim \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} e^{\left(-\frac{m}{T}\right)}$

但我们至今能在宇宙中探测到它们的存在

⇒ 在某刻脱离热平衡且与 plasma 解耦 → freeze out

⇒ 核心方程：Boltzman 方程

In chapter 1

$$\frac{dn_i}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a} n_i = 0 \quad (\text{不考虑相互作用})$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{a^3}\frac{d(n_i a^3)}{dt} = \underbrace{C_i[\{n_j\}]}_{\text{相互作用项}} \Longrightarrow \text{Boltzmann方程}$$

考虑如下反应

$$1+2 \longleftrightarrow 3+4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3}\frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\underbrace{\alpha n_1 n_2}_{\text{湮灭项}} + \underbrace{\beta n_3 n_4}_{\text{生成项}}$$

$\alpha = \langle \sigma \underbrace{v}_{\text{1和2的相对 } v} \rangle \longrightarrow$ 热平均散射截面

$\beta = \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4}\right)_{eq} \alpha \longrightarrow$ 细致平衡

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{a^3}\frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[n_1 n_2 - \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4}\right)_{eq} n_3 n_4\right]}$$

令 $N_i \equiv n_i / s \propto n_i a^3$

$$\Rightarrow \frac{d\ln N_1}{d\ln a} = -\frac{\Gamma_1}{H}\left[1 - \left(\frac{N_1 N_2}{N_3 N_4}\right)_{eq} \frac{N_3 N_4}{N_1 N_2}\right]$$

其中 $\Gamma_1 \equiv n_2 \langle \sigma v \rangle$，衡量粒子1的相互作用率

若 $\Gamma_1 \gg H$，则系统处于平衡

若 $N_1 \gg N_1^{eq}$，R.H.S < 0

若 $N_1 \ll N_1^{eq}$，R.H.S > 0

若 $\Gamma_1 < H$，则系统脱离平衡

R.H.S → 0 ⇒ $N_1 \to$ const

暗物质冻结

利用 Boltzmann 方程我们可以大致推断早期宇宙中 DM 的产生

① 解耦与冻结

考虑如下反应：

$$\chi + \bar{\chi} \longleftrightarrow l + \bar{l}$$

χ 为暗物质粒子，l 为 SM 的粒子

考虑两个假设

(i) l 会保持其平衡密度，即 $n_l = n_l^{eq}$

(ii) χ 与 $\bar{\chi}$ 之间无不对称性，即 $n_\chi = n_{\bar{\chi}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3}\frac{d(n_\chi a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[n_\chi^2 - (n_\chi^{eq})^2\right]$$

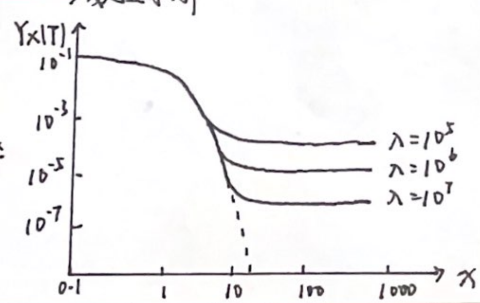
令 $Y_\chi = n_\chi / T$

$x = M_\chi / T$，则 $\frac{dx}{dt} = Hx$

$$\Rightarrow \frac{dY_\chi}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2}\left[Y_\chi^2 - (Y_\chi^{eq})^2\right] \rightarrow \text{Riccati equation}$$

其中 $\lambda = \frac{\Gamma}{H}$，我们将其视为 const

⇒ 数值求解



x 较小 (T 很大) 平衡 ⟶ $T\downarrow$，Y_χ 呈指数下降至 $x = x_f$ 时 ($x_f \sim 10$)

→ 逐渐平稳

那么剩余的丰度就由 $Y_\chi^\infty \equiv Y_\chi(x=\infty)$ 所决定

由于 $Y_\chi \gg Y_\chi^{eq}$，故 Riccati Equation 可写为

$$\frac{dY_\chi}{dx} \approx -\frac{\lambda Y_\chi^2}{x^2}$$

从 $x = x_f$ 到 $x = \infty$ 积分，有

$$\frac{1}{Y_\chi^\infty} - \frac{1}{Y_\chi^f} = \frac{\lambda}{x_f}$$

$\because Y_\chi^f \gg Y_\chi^\infty$

$\Rightarrow \boxed{Y_\chi^\infty \approx \frac{x_f}{\lambda}}$，取决于 x_f 与 λ 的取值

② 暗物质密度

由于 freeze-out 后，$n_\chi \propto a^{-3}$

$$\Rightarrow n_{\chi,0} = n_{\chi,1}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 = Y_\chi^\infty T_0^3 \left(\frac{a_1 T_1}{a_0 T_0}\right)^3$$

a_1 为为任意一个足够使 χ 到达剩余丰度的时刻 t_1 时的尺度因子

上一节课提到，$g_{*s}(aT)^3 = $ const

$$\Rightarrow n_{\chi,0} = Y_\chi^\infty T_0^3$$

⋮

$$\Omega_\chi = \frac{\rho_{\chi,0}}{\rho_{crit,0}} \sim 0.1 \frac{x_f}{\sqrt{g_*(M_\chi)}} \frac{10^{-8}}{\langle \sigma v \rangle} \text{GeV}^{-2}$$

⇒ 主要由散射截面决定

观测：$\sqrt{\sigma v} \sim 10^{-4} \text{GeV}^{-1}$

⇒ 与弱相互作用粒子计算出的同一个数量级

→ WIMP miracle

暗物质

现今的宇宙

暗能量：68.3%

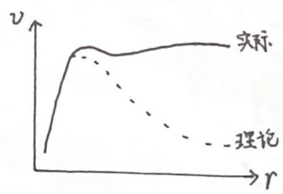
暗物质：26.8%

原子：4.9%

①来源：星系旋转曲线

$$m=\begin{cases} M\frac{r^3}{R^3} & r<R \\ M & r>R \end{cases}$$

$$\Rightarrow v=\begin{cases} \sqrt{\frac{GM}{R^3}r^2} & r<R \\ \sqrt{\frac{GM}{r}} & r>R \end{cases}$$



⇒利用DM来填补两者之间的缺陷

其他观测证据：宇宙大尺度结构与模拟

用暗物质模型去做模拟 P31

GL

⇒目前的观测强烈支持CDM！

②暗物质的密度分布

银河系常用的模型：

NFW：$\rho_{NFW}(r)=\rho_{0N}\left[\frac{r}{r_s}\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^2\right]^{-1}$，$r_s=20$，$\rho_{0N}=0.3136\,GeV/cm^3$

爱因纳斯托：$\rho(r)=\rho_{0E}\exp\left[-\frac{2}{\alpha}\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\alpha}\right]$，$\alpha=0.17$，$\rho_{0E}=9.428\times10^{3}\,GeV/cm^3$

③暗物质候选者（P42）

基本性质：(1) 无强和电磁相互作用

(2) 在宇宙尺度上稳定

时间

(3) 重子物质不能占过大的比例

(4) 不存在于SM

主要候选者：WIMP
- 中微子
- 中性超子
- 轴子 —— 赝南部-哥得斯通bosons，由派斯-奎因U(1)对称性破缺而产生的一种假想粒子，且在早期宇宙中可以从QCD相变中非热产生

超WIMP（湮灭截面远小于弱相互作用反应截面）
- 惰性中微子
- 引力超子
- 卡鲁扎-克莱因粒子

大型天文物体（基本不太行）
- 大质量致密物体
- BH and PBH

~~④暗物质探测~~

贝叶斯统计与引力波天文学

① Why introduce Bayesian inference

BBH (GW150914) — 15 parameters

m_1, m_2, $\cancel{\text{和}}$ $s_1, s_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2 (\varphi_{12}, \varphi_{jl})$

$D_L, t_c, \psi, h_0, \phi_0$, ra, dec

→ Bayesian inference

② Likelihood, priors and ~~postp~~ posteriors

核心定理 $p(\theta|d) = \frac{\mathcal{L}(\theta|d)\, p(\theta)}{Z}$ $[p(\theta|d,M)]$

Primary aim: $p(\underbrace{\theta}_{\text{参数}} | \underbrace{d}_{\text{data}}) \longrightarrow$ posteriors

$p(\theta) \longrightarrow$ priors

$\mathcal{L}(\theta|d) = p(d|\theta) \rightarrow$ Likelihood

$Z = \int p(\theta)\, \mathcal{L}(\theta|d)\, d\theta \rightarrow$ evidence

归一化: $\int d\theta\, p(\theta|d) = 1$

常见 likelihood:

$$\mathcal{L}(\theta|d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(d-\mu(\theta))^2}{2\sigma^2}\right]$$

其越大，表明在给定θ下，观测到d的可能性越大，即表明θ的取值越合理。

priors: $p(\theta)$，表明在我们收到data前，对参数取值的预期(belief)

常见：均匀分布：$X \sim U(a,b)$

对数均匀分布：$Y = \log X$

如 GW150914：$m_1 \sim U(5,100)$

~~evidence：评判模型的优劣，其越大，表明模型解释数据能力越强~~

边缘化：在多个参数下，若我们只对一个特定的参数感兴趣，我们就可以采取边缘化的技巧

$$p(\theta_i|d) = \int \left(\prod_{k \neq i} d\theta_k\right) p(\theta|d)$$

$$= \frac{\mathcal{L}(\theta_i|d)\, p(\theta_i)}{Z}$$（消除对其它参数的不确定性）

但是，若a与b有关联时，即 $\text{Cov}(a,b) \neq 0$

如我们边缘化a，就会使 $p(b|d)$ 比 $\underbrace{p(b|d,a)}_{\text{条件后验分布（给定a的具体值）}}$ 更宽

人话：P(下雨|data) 比 P(下雨|data, 湿度=80%) 更宽

③ Models, evidence and odds

Bayesian evidence: $\cancel{Z \equiv \int d\theta\, \mathcal{L}(\theta|\theta)}$ $\cancel{Z \equiv \int d\theta\, \mathcal{L}(\theta|d)\, p(\theta)}$ $Z \equiv \int d\theta\, \mathcal{L}(\theta|d)\, p(\theta)$

其可以用于模型选择，由 Bayes factor 所衡量

$$BF^1_2 \equiv \frac{Z_1}{Z_2}$$

多采用其对数形式：$\log BF^1_2 = \log Z_1 - \log Z_2$

通常以 $|\log BF| = 8$ 为基准"衡量

例1：$Z_S = \int d\theta\, \mathcal{L}(d|\theta)\, \pi(\theta)$ 有信号

$Z_N = \mathcal{L}(d|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{h^2}{\sigma^2}\right)$ 无信号

例2：比较不同的 priors

Z_{spin}

$Z_{no\ spin}$

例3 比较不同的信号模型

$Z_A = \int d\theta\, \mathcal{L}(\theta|d)\, p(\theta)$

$Z_B = \int d\nu\, \mathcal{L}(\nu|d)\, p(\nu)$

A: GR

B: ~~GR with~~ modified gravity

但通常更加formal是比较 odds ratio

$$O^A_B \equiv \frac{Z_A}{Z_B}\frac{P_A}{P_B} = \frac{P_A(\theta|d)}{P_B(\theta|d)}$$

只不过实际运用中我们通常会令先验比为1
(即采用相同的先验分布)

Bayesian evidence 的另一个信息告诉我们
其边缘化效应告诉我们采取拟合时参数
空间的大小,通常较小的参数空间有更好的
拟合结果(best fit possible and minimum prior volume)
这就是所谓的Occam剃刀原理——如无必要,勿增实体
贝叶斯推断更倾向于选择更简单的模型

如 $n=200$, $x=115$ 次正面

M_1: 正面 $P=0.5$

M_2: $\theta_{正面} \in (0,1)$, 且 $Pr(\theta|M_2) = U[0,1]$

频率学派 $\rightarrow M_2$, 且得出 $\theta = \frac{115}{200}$

Bayes学派 $\rightarrow O^{M_1}_{M_2} \approx 1.2 \rightarrow$ 倾向于 M_1

但注意,这并不意味着更为复杂的模型是错的,我们
只能对其作出更为严格的限制

频率学派:参数是固定的,概率是个固定的值,数据由概率产生,由大量独立实验的频率逼近概率
~~置信区间(confidence intervals) 95%置信区间有[2,5]~~
Bayes学派:概率是随机的变量,参数存在分布,这些分布可以由更新自己的认知被改变