

Cosmology——Inflation

2024 年 10 月 26 日

1 Problems of the Hot Big Bang

1.1 三个疑难

传统的大爆炸理论以及宇宙学模型主要由爱因斯坦场方程和弗里德曼方程两个方程描述。

爱因斯坦场方程：

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1)$$

与之配套的是 FRW 度规：

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-c^2 d\eta^2 + \left(d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2 \right) \right] \quad (2)$$

式 (1) 由广义相对论给出，结合度规 (2) 可以得到弗里德曼第一方程：

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} \quad (3)$$

式 (2)(3) 要求宇宙在大尺度上各向同性且均匀，这实际上是一个很强的要求，这要求宇宙在早期处于一个极为精细的巧合状态，为此会不可避免的带来三个疑难。物理学不喜欢巧合。暴涨理论能比较好的解释宇宙的这种状态是怎样通过早期暴涨而得到的“必然”。

1.1.1 视界疑难

光的速度上限决定了宇宙中因果相连的区域是有限的。考虑宇宙膨胀效应，当遥远天体退行速度达到光速时，意味着观察者当下发出一束光将无法追上该天体，也就是说观察者与该天体没有因果关系，这段距离长度称为**哈勃半径**（也有的书称哈勃视界）：

$$d_H = \frac{c}{H} = (H)^{-1}, \quad \text{自然单位制, } c=1 \quad (4)$$

转换到共动参考系下，给它除以一个尺度因子：

$$d_H = (aH)^{-1} \quad (5)$$

称为**共动哈勃半径**，代表着当下因果不相连区域的大小，但是在过去，当宇宙还未膨胀到现在大小，该天体退行速度未达到光速时，观者发出的光是可以追上的，所以过去是有可能有因果关联的。因此共动哈勃半径仅代表**当下**因果不关联区域的大小。

然后我们考虑在宇宙膨胀下光走过的极限距离。在某个时刻 t_i 发出的光，在 t_0 时刻被观者观察到，这段光走过的最大距离为**粒子视界 (particle horizon)**：

$$d_p(\eta_0) = \eta_0 - \eta_i = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (6)$$

不同于共动哈勃半径，粒子视界内外的事件**永远**都没有因果关联，因为这是在宇宙膨胀背景下光走过的极限距离。粒子视界之内的事件可以有因果联系。

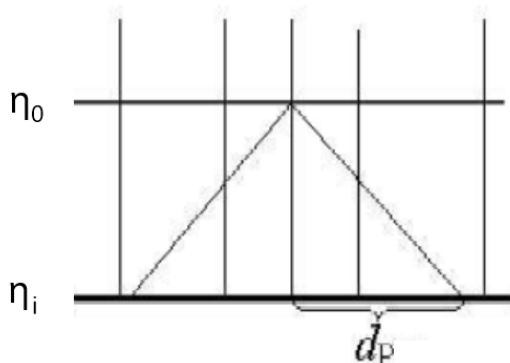


图 1: 粒子视界的时空图。η₀ 代表当下时刻，η_i 可以代表过去某个时刻。d_p 即粒子视界，粒子视界内外的事件永远都没有因果关联。有的书上粒子视界向未来开口，这只是侧重点不同，本图侧重描述处于原点的事件所可能受到过去影响，并产生因果关联的区域；向未来开口的侧重描述处于原点的事件，未来能够影响的边界，但 d_p 的形式都是一样的。在粒子视界内外的事件没有因果联系

利用哈勃常数的定义，式 (6) 可以改写为：

$$d_h(\eta_0) = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_i}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{\ln a_i}^{\ln a_0} (aH)^{-1} d \ln a \quad (7)$$

大爆炸奇点设定为 0 时刻 $a_i \equiv 0$ ¹。我们看到粒子视界和共动哈勃半径 $(aH)^{-1}$ 联系起来。

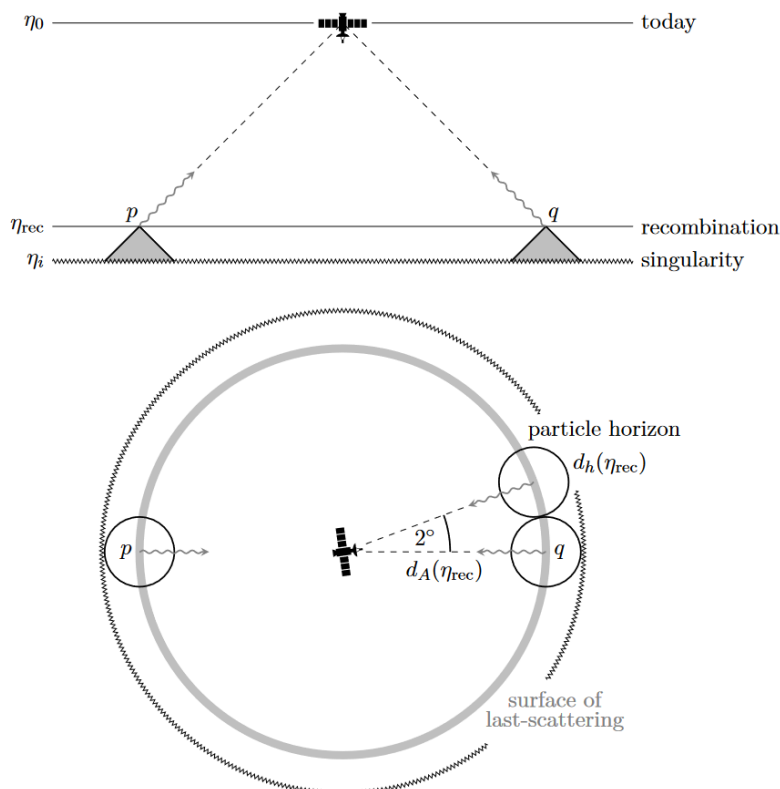


图 2: 上部分图表示了，所有能够影响 p, q 的事件均位于各自的阴影区域内，而两区域没有交集。

¹注意大爆炸是时间奇点，而不是空间上的一个点

CMB 产生于大爆炸后约 38 万年后 (记为 η_{rec}), 当下时刻大约宇宙诞生后 138 亿年 (η_0)。直觉敏锐的同学可能已经发现, CMB 的时间远小于当下时间, 这意味着两者的粒子视界相差极大, 将会带来严重的因果问题, 见图2上部分。

接下来我们具体计算从地球观测 CMB 时上两个因果无关区域的角度间隔。弗里德曼方程 (3) 可以改写为:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda \quad (8)$$

由于截止目前, 暗能量还未起到主导作用, 且曲率项很小, 我们只考虑物质与辐射主导的宇宙:

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4}], \quad \text{with} \quad \Omega_{r,0} = a_{eq} \Omega_{m,0} \quad (9)$$

a_{eq} 是辐射-物质对宇宙作用相当时的尺度因子², 约为 3400^{-1} 。那么共动哈勃半径为可改写为:

$$(aH)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} \frac{a}{\sqrt{a + a_{eq}}} \quad (10)$$

接下来我们就可以计算共形时间:

$$\eta = \int_0^a \frac{d \ln a}{aH} = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} (\sqrt{a + a_{eq}} - \sqrt{a_{eq}}) \quad (11)$$

在早期宇宙 $a \ll a_{eq}$, 由辐射主导, 那么就有 $\eta \propto a$, 在晚期宇宙, $a \gg a_{eq}$, 由物质主导, 有 $\eta \propto a^{1/2}$, 可以计算得:

$$\eta_0 \approx \frac{2}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1}, \quad (12)$$

$$\eta_{rec} = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} \left[\sqrt{1100^{-1} + 3400^{-1}} - \sqrt{3400^{-1}} \right] \approx 0.0175 \eta_0 \quad (13)$$

然后就可以利用式 (7) 计算不同时间的粒子视界:

$$d_h(\eta_{rec}) = \eta_{rec} \approx 265 \text{Mpc} \quad (14)$$

$$d_A(\eta_{rec}) = \eta_0 - \eta_{rec} \approx \eta_0 \approx 15.1 \text{Gpc} \quad (15)$$

然后参考图 (2), 利用简单的三角学得到:

$$\theta_h = \frac{2d_h(\eta_{rec})}{d_A(\eta_{rec})} = \frac{2\eta_{rec}}{\eta_0 - \eta_{rec}} = \frac{2 \times 0.0175}{1 - 0.0175} = 0.036 \text{rad} \approx 2.0^\circ \quad (16)$$

如果考虑到暗能量的影响, 结果修正为: $\theta \approx 2.3^\circ$ 。这意味着, 当我们测量 CMB 时, 天空中每 2.3° 角就代表着过去因果不关联的区域, 整个天空有 $4\pi^2/\theta_h^2 \approx 40000$ 个因果不相连区域, 而他们测得的背景温度又都惊人的一致, $T = 2.7\text{K}$, 各向异性仅有 $\frac{\Delta T}{T} = 10^{-5}$, 这种情况已经很难用巧合来解释了。在因果不相连的区域测得平衡的物理量, 这是倒果为因, 祸乱人心。

1.1.2 平直性疑难

还是从弗里德曼方程 (8) 出发, 含时的曲率参量为:

$$\Omega_k(t) = \frac{\rho_{crit} - \rho}{\rho_{crit}} = \frac{(a_0 H_0)^2}{(aH)^2} \Omega_{k,0} \quad (17)$$

²见第二章

$\Omega_{k,0}$ 是当下测得的曲率参量, $|\Omega_{k,0}| < 0.005$, 我们很容易从式 (17) 看出来, 共动哈勃半径 $(aH)^{-1}$ 是随时间增大而增大的, 这意味着在 138 亿年前, 宇宙诞生之初, 宇宙的曲率是小的惊人的。接下来我们具体求一下早期宇宙的曲率。利用式 (10), 式 (17) 可改写为:

$$\Omega_k(t) = \frac{\Omega_{k,0}}{\Omega_{m,0}} \frac{a^2}{a + a_{\text{eq}}} \quad (18)$$

在物质与辐射相当 $a = a_{\text{eq}}$ 时有:

$$|\Omega_k(t_{\text{eq}})| = \frac{|\Omega_{k,0}|}{\Omega_{m,0}} \frac{a_{\text{eq}}}{2} < 10^{-6} \quad (19)$$

早期宇宙由辐射主导, 哈勃常数可以表示成:

$$H^2 = H_{\text{eq}}^2 \Omega_{r,\text{eq}} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a} \right)^4 \quad (20)$$

代回式 (17), 可以得到:

$$\Omega_k(t) = \frac{(a_{\text{eq}} H_{\text{eq}})^2}{(aH)^2} \Omega_k(t_{\text{eq}}) = 2\Omega_k(t_{\text{eq}}) \left(\frac{a}{a_{\text{eq}}} \right)^2 \quad (21)$$

现在就可以计算早期宇宙的曲率参数, 根据大爆炸模型估算: $z_{\text{BBN}} \approx 4 \times 10^8$, $z_{\text{EW}} \approx 10^{15}$, 利用 $a(t) = \frac{1}{1+z}$, 可以粗略估计得:

$$|\Omega_k(t_{\text{BBN}})| < 10^{-16}, \quad |\Omega_k(t_{\text{EW}})| < 10^{-29} \quad (22)$$

这意味着, 在大爆炸时期, 宇宙平坦的难以置信。

1.1.3 超视界关联

略, 和视界疑难本质上一样, 都是因果不关联。

1.1.4 磁单极子疑难

摘抄: “宇宙演化过程中, 随着温度下降, 宇宙会经历若干次对称性自发破缺导致的相变。在大统一相变中会产生磁单极子。在相变发生时, 宇宙真空呈现出畴状结构, 畴的尺度应不大于因果关联长度。不同的真空畴中 Higgs 场有不同的“取向”, 磁单极子是不同真空畴的交结。理论预期磁单极子的数密度与光子数密度之比不小于 10^{-12} 。而实测表明, 磁单极子的数密度与光子数密度之比小于 10^{-28} 。这就是磁单极疑难。”³

还是因果不关联。

2 Before the Big Bang

2.1 收缩哈勃球

共动哈勃半径的变化率为:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2} \quad (23)$$

³黄超光《广义相对论》第7章

在传统宇宙学模型下，宇宙因子按如下规律演化：

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+w_i)} & w_i \neq -1 & t^{2/3} & \text{MD} \\ & & t^{1/2} & \text{RD} \\ e^{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t} & w_i = -1 & & \Lambda\text{D} \end{cases} \quad (24)$$

早期宇宙不考虑暗能量的影响，均有 $\ddot{a} < 0$ ，宇宙在减速膨胀⁴，这意味着， $\frac{d}{dt}(aH)^{-1} > 0$ ，哈勃球在增大，由此引出了上述若干疑难。因此，要接近上述疑难，最简单直接的方法就是考虑一个收缩的哈勃球：

$$\boxed{\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0} \quad (25)$$

这代表 $\ddot{a} > 0$ ，宇宙在加速膨胀。这也就是“暴胀”一词的含义。后面我们还会看到，这个“暴胀”的程度非常巨大。

2.2 视界疑难的解决

在式 (25) 的条件下我们重新计算粒子视界，由于物质，辐射都不满足式 (25) 的条件，我们将共动哈勃半径的表达式还原为一般形式：

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (26)$$

带入粒子视界的积分 (7) 中可得：

$$d_h(a) = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} \left[a^{\frac{1}{2}(1+3w)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \right] \equiv \eta - \eta_i. \quad (27)$$

常规物质满足 **SEC** (strong energy condition) 条件，即 $1+3w > 0$ ，并假设 $\eta_i = 0$ 时， $a_i = 0$ ，可以得到： $d_p = \eta$ ；式 (25) 要求 $1+3w < 0$ ，此时得到的结果为：

$$\eta_i \equiv \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0, w < -\frac{1}{3}} -\infty. \quad (28)$$

共动时间被向前推了很远很远，可以形成足够大的粒子视界，以容纳整个宇宙在因果相连的区域。

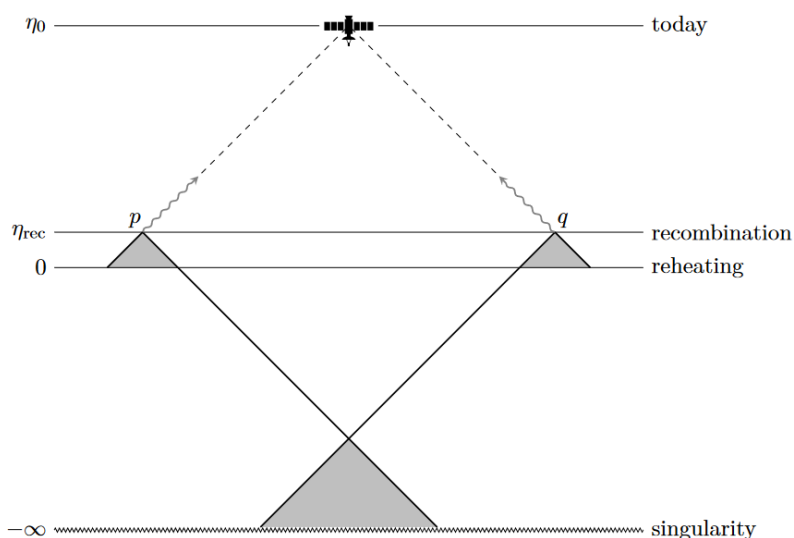


图 3: 收缩哈勃球可以将共动时间向前推很远很远，使得粒子视界足够将整个宇宙纳入因果关联区域。相反的，膨胀哈勃球做不到这样。

⁴如果我们的暗能量理论正确，未来当暗能量主导时又会进入加速膨胀阶段。

这样的话，大爆炸就不再是时间起点，在此之前还有一小段时间。注意，虽然 $\eta \rightarrow -\infty$ ，但由于此时 $a(t)$ 很小， t 仅仅向前推了很小一段时间。

2.3 平直性疑难的解决

收缩哈勃球也直接的解决了平直性疑难，由公式 (17)，可以直接看出，当哈勃球在随时间收缩时，曲率项是在不断减小的，纵使宇宙早期带有一点曲率，在暴胀期间它可以减小到足够的量级，以至于进入大爆炸模型后为膨胀到如今的曲率项留有了足够的余地，接下来我们具体计算，要多少程度的暴胀能够弥补大爆炸模型下的宇宙膨胀带来的曲率增加。

由弗里德曼方程 (8) 可以得到：

$$(aH)^2 = (a_i H_i)^2 [(1 - \Omega_{k,i})(a/a_i)^{-(1+3w)} + \Omega_{k,i}] \quad (29)$$

带入式 (17) 可得：

$$\Omega_k(N) = \frac{\Omega_{k,i} e^{(1+3w)N}}{(1 - \Omega_{k,i}) + \Omega_{k,i} e^{(1+3w)N}} \quad (30)$$

这里 $N = \ln(a/a_i)$ ，代表尺度因子的指数膨胀 (e-fold) “e-叠数”⁵

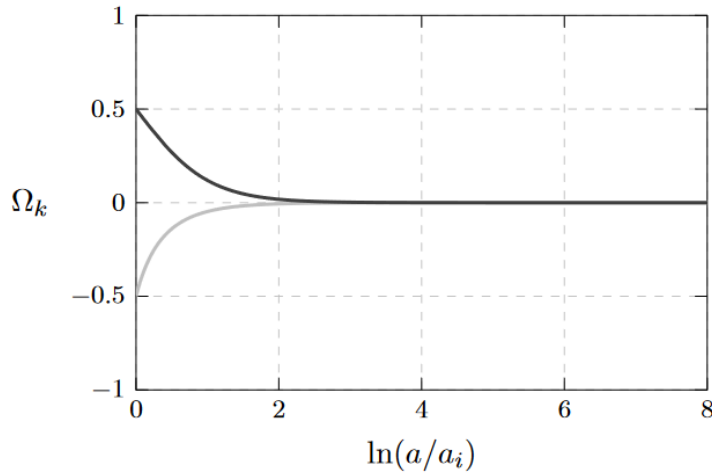


图 4: 式 (30), 当 $(1 + 3\omega < 0)$ 时, 可以看到宇宙曲率随时间迅速减少, 很快趋于 0。也就是说, 大爆炸早期极端的平坦的宇宙, 是因为暴胀而被拉平的。

我们利用共动哈勃半径作为判定因果联系的距离。原则上应该使用粒子视界, 但是粒子视界大于共动哈勃半径, 所以用共动哈勃半径是一个更强的约束条件, 而且还好算。

后面我们会看到在暴胀期间, 哈勃常数几乎是恒定的 $H_i \approx H_e$, 因此共动哈勃半径的减少, 就是尺度因子 a 的增大。那么我们的目标就是计算出这段时期内总共膨胀了多少, 通常用 e-foldings 表示:

$$N_{tot} = \ln(a_e/a_i) \quad (31)$$

在热大爆炸时期, 哈勃半径的增长依赖于高温等离子体的最大温度, 记为 reheating Temperature, T_R 。为简便运算, 我们暂且仅考虑辐射组分, 满足 $H \propto a^{-2}$, 我们有:

⁵由于 a 与时间 t 相关, N 也可以表征时间

$$\frac{a_0 H_0}{a_R H_R} = \frac{a_0}{a_R} \left(\frac{a_R}{a_0} \right)^2 = \frac{a_R}{a_0} \sim \frac{T_0}{T_R} \sim 10^{-28} \left(\frac{10^{15} \text{GeV}}{T_R} \right) \quad (32)$$

再假设暴胀末期的能量密度都转换为了热等离子体中粒子的能量，而不是驱动宇宙膨胀，所以哈勃半径没太大变化： $(a_e H_e)^{-1} \sim (a_R H_R)^{-1}$ 。因此，我们得到：

$$(a_i H_i)^{-1} > (a_0 H_0)^{-1} \sim 10^{28} \left(\frac{T_R}{10^{15} \text{GeV}} \right) (a_e H_e)^{-1} \quad (33)$$

因为 $N = \ln(a/a_i)$ ，进一步可以得到：

$$N_{tot} \equiv \ln(a_e/a_i) > 64 + \ln(T_R/10^{15} \text{GeV}) \quad (34)$$

这就是说，需要约 60 次方的暴胀，才弥补解决大爆炸模型下的曲率疑难，这确实是非常可观的数量级。

3 暴胀的物理机制

总而言之，在大爆炸模型之前拼上去一段暴胀阶段，就可以从数学上可以解决大爆炸的疑难，接下来我们来探求它的物理机制。什么样的东西能够驱动宇宙暴胀？

暴胀理论的特点是，即使空间在显著膨胀，各个物理量却几乎不变。

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon), \quad (35)$$

在这里我们引入慢滚参数：

$$\boxed{\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN}} \quad (36)$$

$dN = d \ln a = H dt$ 。一个收缩的哈勃球，就对应 $\epsilon < 1$ 。为了能够暴胀，实际上我们要求 $\epsilon \rightarrow 0$ ，这样的话哈勃常数满足时间平移不变性， $H = \text{const}$ ，进而根据 $\dot{a}/a = H$ ，得到：

$$a(t) \approx a(t_i) e^{H(t-t_i)} \quad (37)$$

表明时空在指数膨胀⁶，满足我们的收缩哈勃球条件。相应是时空度规为 de Sitter space：

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} dx^2 \quad (38)$$

当然，暴胀肯定会结束，时间平移不变性最后会被打破，不过至少在这段暴胀时期内，de Sitter 度规会是一个很好的近似。暴胀时期通常也被称为 de Sitter 时期；

为了解决平直性疑难，暴胀须达到约 40-60 个 e 叠数“e-folds”。这需要 ϵ 在一定时间内均满足 $\epsilon \rightarrow 0$ ，这要求 ϵ 的变化率也足够小。定义第二慢滚参数 κ ：

$$\boxed{\kappa \equiv \frac{d \ln \epsilon}{dN} = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}} \quad (39)$$

满足： $|\kappa| \ll 1$ 。当 $\epsilon, \kappa \ll 1$ 时，宇宙将快速的指数膨胀，即暴胀。 $\epsilon, \kappa \ll 1$ 就是暴胀时期的条件。

⁶这和暗能量效果一样，在未来（也许已经是现在了），暗能量主导时，宇宙会重新加速膨胀

3.1 标量场动力学

那么除了暗物质以外，什么玩意能够驱动宇宙指数膨胀呢，为此引入一个标量场 $\phi(t, \mathbf{x})$ ，称为暴胀场，或暴胀子 (inflaton)。且具有势能 $V(\phi)$

第一性原理:

$$S = \int dt d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (40)$$

利用变分法:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt d^3x \left[\dot{\phi} \delta \dot{\phi} - \nabla\phi \cdot \nabla \delta\phi - \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right] \\ &= \int dt d^3x \left[-\ddot{\phi} + \nabla^2\phi - \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi, \end{aligned} \quad (41)$$

于是我们得到:

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (42)$$

这被称为 Klein-Gordon equation. 这是对应一般的场都成立的

考虑到尺度因子的存在，物理距离应为 $a(t)\mathbf{x}$ ，重复上述变分法得到:

$$S = \int dt d^3x a^3(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2a^2(t)} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (43)$$

假设标量场是各向同性的 $\phi(t)$,

$$S = \int dt d^3x a^3(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (44)$$

变分:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt d^3x a^3(t) \left[\dot{\phi} \delta \dot{\phi} - \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right] \\ &= \int dt d^3x \left[-\frac{d}{dt} (a^3 \dot{\phi}) - a^3 \frac{dV}{d\phi} \right] \delta\phi, \end{aligned} \quad (45)$$

于是我们得到:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (46)$$

这被称为 Hubble friction，摩擦项 $3H\dot{\phi}$ 对暴胀动力学有重要作用。

暴胀期间由上述标量场主导宇宙演化，为了使用弗里德曼方程，很自然的猜测能量密度为:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (47)$$

对时间求导得到 $\dot{\rho}_\phi$ ，再利用连续性方程 $\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + P_\phi)$ ，能够得到压强为:

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (48)$$

第二章的推导已经告诉我们: $\ddot{a} \propto -(\rho_\phi + 3P_\phi)$ ，如果暴胀场的势能项远大于动能项，那么有 $P_\phi \approx -\rho_\phi$ ，那么暴胀场就像一个暂时的宇宙学常数，引发指数膨胀。

⁷这个式子也可以用公式 $S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$ 得到，不过会繁琐一些。

3.2 慢滚近似

因此，标量场的动力学由两个方程描述：

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right], \quad (49)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (50)$$

标量场主导的弗里德曼方程和 KG 方程。其中约化普朗克质量 $M_{\text{Pl}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} = 2.4 \times 10^{18} \text{GeV}$,⁸ 可以看出两个方程是耦合的。注意到，从式 (49) 和式 (50) 可以得到：

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2} \quad (51)$$

相应的 ϵ 为

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2 H^2} = \frac{\frac{3}{2}\dot{\phi}^2}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V} \quad (52)$$

因此暴胀 ($\epsilon \ll 1$) 要求势能项远大于动能项。这可以用于简化式 (49)。

为了简化式 (50)，我们定义：

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad (53)$$

看看它有什么特殊。

对 ϵ 求导，得到：

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{M_{\text{Pl}}^2 H^2} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{M_{\text{Pl}}^2 H^3}, \quad (54)$$

然后带入 κ 的表达式 (39)，可以得到：

$$\kappa = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} = 2\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - 2\frac{\dot{H}}{H^2} = 2(\epsilon - \delta). \quad (55)$$

那么 $\{\epsilon, |\kappa|\} \ll 1$ 就等价于 $\{\epsilon, |\delta|\} \ll 1$ ，这意味着暴胀条件 $\{\epsilon, |\kappa|\} \ll 1$ 就要求了 $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$ ，那么我们就可以简化式 (50)，结合简化后的式 (49)：

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{\text{Pl}}^2} \quad (56)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V_{,\phi}, \quad (57)$$

这两个方程就比较好求，将式 (56) 带入式 (57) 得到：

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2 H^2} \approx \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad (58)$$

为了估算参数 δ ，对式 (57) 求导得到：

$$\delta + \epsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \approx M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \equiv \eta. \quad (59)$$

⁸注意这里和量子力学没有关系，只是粒子物理和宇宙学习上使用约化普朗克质量。

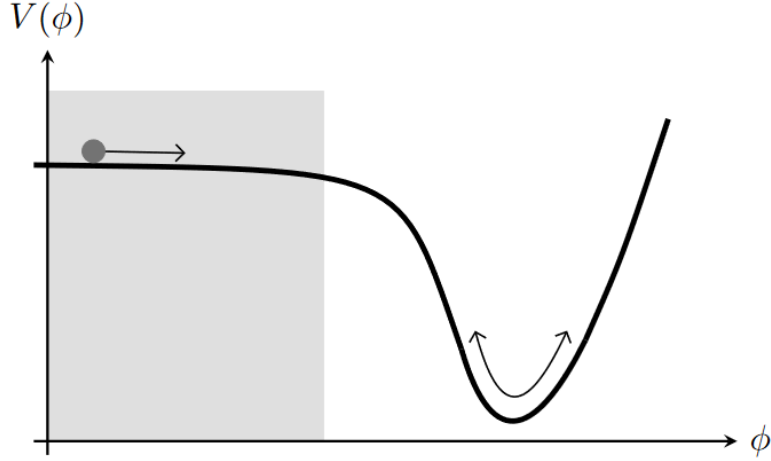


图 5: 暴胀的势能要求, 阴影部分势能十分平坦, 即对应暴胀期间; 底部对应重加热时期, 使宇宙升温使其能够满足热大爆炸的条件。

因此, 我们就得到了这两个式子:

$$\boxed{\varepsilon_V \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2, \quad \eta_V \equiv M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V}} \quad (60)$$

我们就可以简便的判断给定势能是否满足暴胀要求。只要这两个式子远小于 1, 暴胀就会发生。这代表着, 在暴胀期间, 势能很大且十分平坦:

暴胀的 e-folds 用标量场表示则为:

$$N_{\text{tot}} \equiv \int_{a_i}^{a_e} d \ln a = \int_{t_i}^{t_e} H(t) dt = \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi, \quad (61)$$

初末状态可以取 $\epsilon(t_i) = \epsilon(t_e) = 1$ 的时候. 利用式 (56) 和式 (58) 可以得到

$$N_{\text{tot}} \approx \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{\text{Pl}}}, \quad (62)$$

暴胀要求 $N_{\text{tot}} \approx 60$, 这就对势能的选取提出了要求。

3.3 样例说明

为了更好的说明, 让我们考虑这样一个二次方形式的势能:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (63)$$

这个势能实际上被 CMB 的观测给排除了, 不过它形式比较简单, 可以用作样例来说明慢滚的机制, 并且在再加热阶段, 势能可以近似为这个。该势能的慢滚参数为:

$$\varepsilon_V(\phi) = \eta_V(\phi) = 2 \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi} \right)^2. \quad (64)$$

为了满足慢滚条件 $\{\varepsilon_V, |\eta_V|\} < 1$, 则有:

$$\phi > \sqrt{2} M_{\text{Pl}} \equiv \phi_e. \quad (65)$$

代入 N_{tot} 的表达式有：

$$N_{tot} = \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{d\phi}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} = \frac{\phi^2}{4M_{Pl}^2} \Big|_{\phi_e}^{\phi_i} = \frac{\phi_i^2}{4M_{Pl}^2} - \frac{1}{2}. \quad (66)$$

为了达到 $N_{tot} \approx 60$ ，则要求势能：

$$\phi_i \approx 2\sqrt{60}M_{Pl} \approx 15M_{Pl}. \quad (67)$$

整个过程的 $\Delta\phi > M_{Pl}$ ，这将会导致可观测的引力波信号。

以上是 Daniel 书上一个简单的估算，另一本书的做法如下：将式 (63) 带入式 (50)，再利用 $\ddot{\phi} = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$ ，可以得到：

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{\sqrt{12\pi} (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)^{1/2} \dot{\phi} + m^2\phi}{\dot{\phi}} \quad (68)$$

用相图法研究，这个解有吸引子解，所有解都会随时间演化到吸引子上，接下来只考虑第四象限的情况，其他象限由对称性可类似得到。

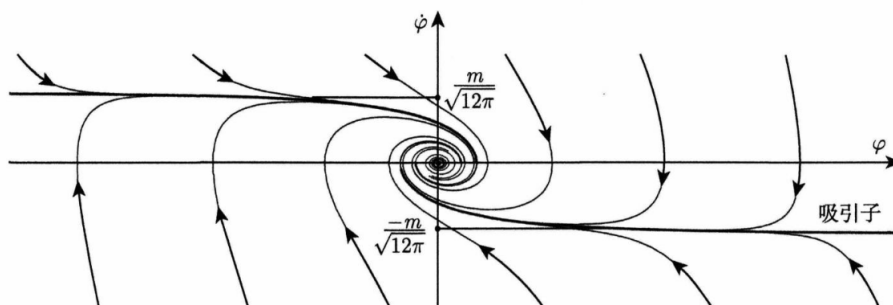


图 6: 方程 (68) 在相空间的演化示意图。

超硬 (ultra-hard) 物态方程，我们首先考虑 $|\dot{\phi}| \gg m\phi$ 的区域，也就是势能项远小于动能项的区域，这里违反暴胀的条件，我们将看到，他们很快会收敛到满足暴胀条件的吸引子上。

在 $\dot{\phi} \gg V$ 时，可以忽略 $m\phi$ 项，得到：

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \simeq \sqrt{12\pi} \dot{\phi} \quad (69)$$

他的解很简单：

$$\dot{\phi} = C \exp(\sqrt{12\pi}\phi) \quad (70)$$

$$\phi(t) = \text{const} - \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \ln t \quad (71)$$

上式带入式 (49) 可以得到：

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \simeq \frac{1}{9t^2}. \quad (72)$$

根据式 (70)，它在相空间是一条指数函数，这代表着即使初始 $|\dot{\phi}|$ 很大，也会迅速阻尼掉，而这段时间内 ϕ 场本身没有太大变化。从 $|\dot{\phi}|$ 很大的位置开始演化的轨道会急剧上升落入吸引子解上。这个结果扩大了暴胀的初始条件范围。

暴胀解。如果一条轨道落入 $|\phi| \gg 1$ 的吸引子的平缓区域，接下来这个解就描述了一段加速膨胀的过程。根据式 (68)，考虑暴胀条件下势能远大于动能，可以得到吸引子解：

$$\dot{\phi}_{\text{atr}} \approx -\frac{m}{\sqrt{12\pi}}, \quad (73)$$

他的高阶修正是：

$$\dot{\phi}_{\text{atr}} = -\frac{m}{\sqrt{12\pi}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{12\pi}\phi \right)^{-2} + O\left(\left(\sqrt{12\pi}\phi \right)^{-3} \right) \right). \quad (74)$$

在忽略高阶修正时有：

$$\phi_{\text{atr}}(t) \simeq \phi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t - t_i) \simeq \frac{m}{\sqrt{12\pi}}(t_e - t), \quad (75)$$

其中 t_i 是落入这个轨道的时刻， t_e 是 ϕ 正式减为零的时刻，实际上没等 ϕ 等于零时，上式就已经不适用了。这里我们采用的是普朗克单位制，当标量场的场值接近普朗克值时（更确切的是 $\phi \simeq 1/\sqrt{12\pi} \simeq 1/6.$ ），上式就不适用了。

将式 (75) 带入式 (49)，并忽略动能项，得到：

$$a(t) \simeq a_f \exp\left(-\frac{m^2}{6}(t_e - t)^2\right) \simeq a_i \exp\left(\frac{H_i + H(t)}{2}(t - t_i)\right), \quad (76)$$

根据式 (75) 可以得到暴胀持续时间大致为：

$$\Delta t \simeq t_e - t_i \simeq \sqrt{12\pi} \frac{\phi_i}{m}. \quad (77)$$

在这段时间内，尺度因子的增长为：

$$\frac{a_e}{a_i} \simeq \exp(2\pi\varphi_i^2). \quad (78)$$

比如当暴胀场 ϕ_i 的值取 4 倍普朗克值，就是约 e^{100} 次，显然超过 60，超过了平直性疑难的需要。那么暴胀 e 叠数上限是多少？

如果考虑一个质量为 10^{13}GeV 的标量场，为了使能量密度仍然处于亚普朗克尺度：

$$\frac{1}{2}m^2\phi_i^2 < \rho_{Pl} \sim 10^{38}\text{GeV} \quad (79)$$

ϕ_i 的场值最大约为 10^6 ，那么相应的：

$$N_{\text{tot}} = 10^{12} \quad (80)$$

这十分庞大，可能我们的可观测宇宙只是一个更大的因果关联的宇宙的一角，而且我们可能永远都无法接触到了。⁹

4 宇宙的再加热

宇宙再加热的理论比较粗糙且不完善，这里只做一个定性的描述。根据前文第三章宇宙熵守恒，我们可以推出来宇宙的温度与尺度因子成反比。在尺度因子暴胀了约 10^{40} 次后，温度也因此下降了 10^{40} ，我们需要一个新的机制，重新加热宇宙，使其能够满足热大爆炸中的重子合成温度条件。一个方法就是标量场振荡再加热。

⁹这跟 Daniel 那本书上算的不一样阿。

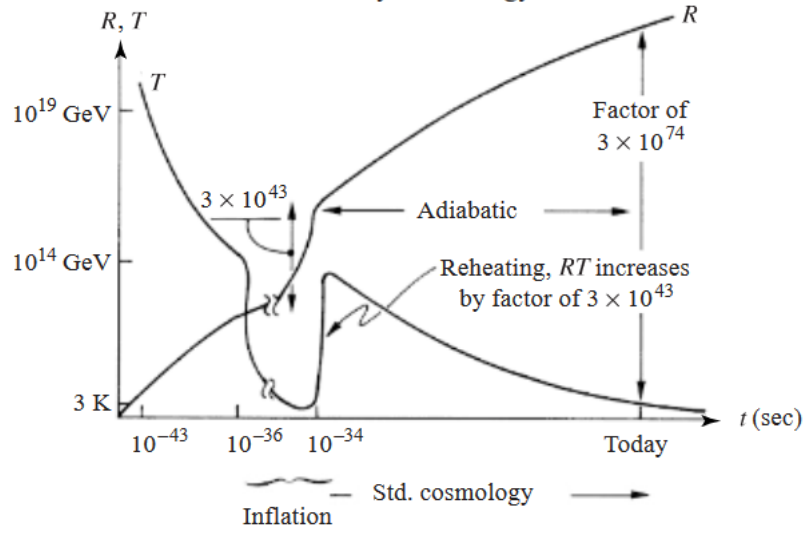


图 7: 暴胀时期的宇宙

根据粒子物理，暴胀子的衰变可以在方程 (50) 中加入衰变项得到：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_{\phi}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (81)$$

给方程乘以 $\dot{\phi}/2$ ，并由 $\rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ ，有

$$\dot{\rho}_{\phi} + 3H\rho_{\phi} = -\Gamma_{\phi}\rho_{\phi}, \quad (82)$$

其中 Γ_{ϕ} 是暴胀子的衰变率 (inflaton decay rate)。对于简谐振荡，振荡动能的平均值等于振荡势能的平均值：

$$\frac{1}{2}\langle\dot{\phi}^2\rangle = \langle V(\phi)\rangle = \frac{1}{2}\langle\rho_{\phi}\rangle \quad (83)$$

所以在一个振荡周期，从期望的角度看，上式可以化成：

$$\dot{\rho}_{\phi} + (3H + \Gamma_{\phi})\rho_{\phi} = 0 \quad (84)$$

如果暴胀子场与费米子耦合，那么衰变速率会比较慢，如果暴胀子场可以和玻色子耦合，玻色子凝聚会极大的加速衰变，这段过程被称为预加热 (preheating)。

新产生的粒子相互作用，达到大爆炸所需要的热平衡状态，类似第三章的叙述，再加热的温度满足如下关系：

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30}g_*(T_R)T_R^4. \quad (85)$$

$g_*(T_R)$ ，是第三章中的有效自由度， T_R 是再加热时的温度。

经历若干复杂的粒子物理和场论的计算，我们不加证明的给出¹⁰，再加热的温度最后满足这样的式子：

$$T_R \sim \frac{m^{1/2}}{N_T^{1/2}g_*^{1/4}}, \quad (86)$$

其中 N_T 是暴胀子振荡的次数，约为 10^6 ， m 是暴胀子的质量约为 $10^{13} \sim 10^{14}$ GeV，再取 $g_* \approx 10^2$ 那么 T_R 约为 10^{12} GeV。

¹⁰因为我看不懂。

5 开放的问题

5.1 紫外敏感性 (Ultraviolet Sensitivity)

我们目前没有关于暴胀的完整的微观理论，最保守的方法是采用有效场论 (EFT) 的方法，将我们的未知参数化。假设暴胀理论在某个截断能标 Λ 下有效，我们想知道高能理论如何影响低能理论。将所有对低能理论的修正展开，对应的扩展的拉氏量为：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[\phi] = \mathcal{L}_0[\phi] + \sum_n c_n \frac{O_n[\phi]}{\Lambda^{\delta_n-4}}, \quad (87)$$

c_n 是一组数量级为 1 的系数， O_n 是一组算符，参数化了高能标下与额外的自由度的耦合的修正。如果能级比 Λ 低很多，那么相应的效应会以 E/Λ 的幂次被压制，因此不会在低能实验（观测）中显示出来。这可以解释为什么量子引力不会影响我们的世界。但是目前的暴胀理论，即使是对普朗克尺度的能标也十分敏感。在不考虑任何对称性的情况下，慢滚的 EFT 为：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) - \sum_n c_n V(\phi) \frac{\phi^{2n}}{\Lambda^{2n}} - \sum_n d_n \frac{(\partial\phi)^{2n}}{\Lambda^{4n}} + \dots, \quad (88)$$

我们在第一阶截断，得到势能的修正为：

$$\Delta V = c_1 V(\phi) \frac{\phi^2}{\Lambda^2} \quad (89)$$

因为 $\phi \ll \Lambda$ ，因此 $\Delta V \ll V$ ，也就是说这对暴胀的势能仅仅是一个很小的修正，但是我们可以看到，相应的 η_V 的修正：

$$\Delta\eta_V = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{V} (\Delta V)_{,\phi\phi} \approx 2c_1 \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\Lambda} \right)^2 > 1 \quad (90)$$

一般我们有能量尺度 $\Lambda < M_{\text{Pl}}$ ，那么该修正就会大于 1，就会违反暴胀的慢滚条件。这就是 eta-problem. 有若干种方法试图处理这个问题，一种是认为 ϕ 场有平移对称性，那么 $c_n \ll 1$ ，还有就是超对称理论 (supersymmetry)，可以很好的解决这个问题。

5.2 初始条件

我们对暴胀理论有一些隐含的要求，我们设想初始时刻暴胀场处于平坦的高势能区域，为什么会这样？一种设想是初始时暴胀场的势能在空间不同位置取值不一样，有高有低。那些处于势能顶端的很快开始暴胀而占据主导地位。

另一种解释是，认为宇宙更早的时候处于一种亚稳态的假真空状态¹¹，这些假真空是局域势能低点，经由量子隧穿得到暴胀初始条件。假真空的模型相应的会导致”永恒膨胀“。

¹¹不好听，我愿称之为虚空

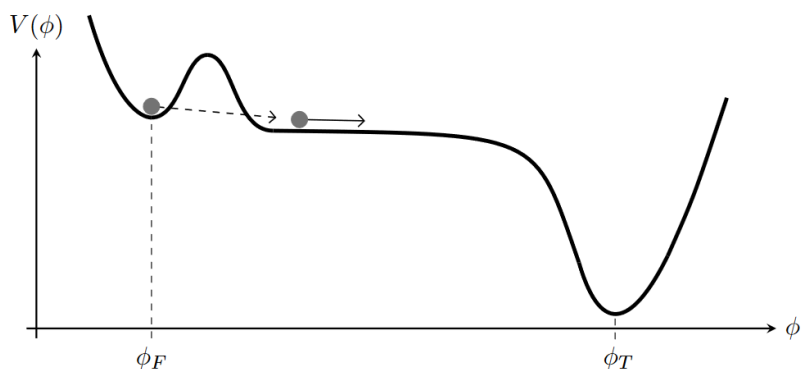


图 8: 亚稳态高能真空暴胀示意图, ϕ_F , 代表假真空, 可以通过量子隧穿的方式进入慢滚初始状态。如果隧穿速率小于膨胀速率, 将会产生“永恒膨胀”。

5.3 永恒膨胀 Eternal inflation

倘若暴胀场处于假真空状态, 那么宇宙不断将指数膨胀, 有些区域因量子隧穿效应退出了假真空状态而进入了常规的暴胀势的顶端, 那么这片区域将很快结束暴胀, 之后进行正常的弗里德曼宇宙演化阶段。设假真空的衰变率是 Γ , 那么假真空历经一段时间仍然存在概率为 $e^{-\Gamma t}$, 但是倘若量子隧穿的速率小于暴胀的速率, 那么在全局, 暴胀永远不会停下, 在局部有些地方退出了暴胀, 形成了常规的物质宇宙, 我们的宇宙可能只是一个嵌在更大的多元宇宙 (multi-universe) 的口袋宇宙 (pocket universe)。

永恒膨胀也可能作为慢滚膨胀的一种极限情况。在第八章, 我们会研究量子涨落对暴胀的影响, 倘若量子涨落的随机性盖过了经典涨落, 同样也会发生永恒暴胀。

当然, 关于永恒暴胀的理论目前都只是幻想。永恒暴胀是个老理论了, 不过最近在弦论背景下又复活了。在弦论中, 没有一个特定的真空, 但是有很多真空亚稳态解, 这些区域被称为弦景观 (string landscape), 在这些区域内, 物理常数可能不同, 比如宇宙学常数可以取不同的值。永恒暴胀提供了一种这种弦景观演化的机制。这和前文提到的多元宇宙一致。两者相结合可以解决宇宙学常数问题¹²。

虽然有很多证据表明极早期宇宙发生了类似暴胀的事件, 但还不能说我们的暴胀理论是正确的, 还有待观测和实验。

¹²啥问题? 怎么解决的?