结构形成

前几章的模型中都认为宇宙是均匀全同的，但要研究宇宙结构的形成必须引入非均匀性。如果这些非均匀性相对较小，我们可以用微扰法去处理。本章用牛顿经典引力下的微扰来研究结构形成，下一章会用广相讨论。

本章先用从牛顿理论出发导出结构演化的基本方程。之后我们用这些方程描述暗物质演化，并在线性体系中加入微扰，可以得到在物质纪元中密度扰动线性依赖于尺度因子，而在辐射纪元中则是对数依赖，这种非线性依赖作用在傅里叶变换上对暗物质密度的模式影响是非平庸的。在此基础上，我们会研究宇宙物质的一些统计学性质。最后我们可以描述暗物质非线性聚集现象的一些基本特征。

基本方程导出：

流体动力学：

考察空间中一个固定范围(Pic. 高斯定理)，有物质守恒

$$\Delta m = \Delta t \oint \boldsymbol{J} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \Delta t \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V$$

取其空间极限，得到**连续性方程**：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0\,.$$

跟随一团选定的流体(Pic. 注意牛顿运动方程是对于物体而言的)，有牛顿运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} = -\oint P\mathrm{d}\mathbf{S} = -\oint \mathbf{e}_i (P\mathbf{e}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}) = -\mathbf{e}_i \int \boldsymbol{\nabla} \cdot (P\mathbf{e}_i)\mathrm{d}V = \int -\mathbf{e}_i\,\partial_i P \mathrm{d}V = \int -\boldsymbol{\nabla} P \mathrm{d}V$$

缩小选定的流体范围(链式法则)，取极限得到**欧拉方程**：

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} P.$$

取决于研究的流体性质，我们还有**状态方程**：

$$P = P(\rho, T)$$

这三条方程构成完备的方程组，描述了流体系统各参量的演化方式.

如果我们认为体系达到平衡，不再产生流动，处处有$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$，体系的密度以及压强将会处处均匀且保持不变(不依赖空间、时间地)，$\rho = \bar{\rho}, P = \bar{P}$. 在此基础上，我们考虑一个微小流动$\boldsymbol{u}$作为体系的微扰，使得

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$$
$$P = \bar{P} + \delta P$$

根据**连续性方程**和**欧拉方程**，我们有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = \partial_t(\overline{\rho} + \delta\rho) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u} + \delta\rho\boldsymbol{u}) = \partial_t(\delta\rho) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) + o(\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\rho(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}P = (\overline{\rho} + \delta\rho)(\partial_t\boldsymbol{u} + o(\boldsymbol{u})) + \boldsymbol{\nabla}(\overline{P} + \delta P) = \overline{\rho}\,\partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}(\delta P) + o(\boldsymbol{u}) = 0$$

忽略高阶项，即得

$$\partial_t \delta\rho = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\bar{\rho}\mathbf{u})\,,$$
$$\bar{\rho}\,\partial_t \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\delta P\,.$$

因此

$$\partial_t^2 \delta\rho = \partial_t(-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u})) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\overline{\rho}\,\partial_t\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(-\boldsymbol{\nabla}\delta P) = \nabla^2\delta P$$

这样，我们得到了密度涨落与压强涨落之间的关系

$$\partial_t^2 \delta\rho - \nabla^2 \delta P = 0\,.$$

现在，它离一个可求解的体系还差一个由具体的流体性质决定的状态方程. 如果我们考虑<u>**正压流体**</u>，即某点压强仅依赖于该点密度的流体$P = f(\rho)$，(还记得我们的假设，密度在某个值附近发生微小涨落) 有

$$\delta P = P - \overline{P} = f(\rho) - f(\overline{\rho}) = f'(\overline{\rho})\delta\rho + o(\delta\rho) \approx f'(\overline{\rho})\delta\rho \equiv c_s^2 \delta\rho$$

其中c_s定义为<u>**声速**</u>. 这时压强与密度之间的关系变为波动方程

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2\right)\delta\rho = 0}\,.$$

它的解被称为<u>**声波**</u> (过程略)：

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = A_{\mathbf{k}} \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + B_{\mathbf{k}} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,,$$

其中$\boldsymbol{k}$是波矢，代表一个模式，$\omega = c_s|\boldsymbol{k}|$是频率，$A_{\boldsymbol{k}}, B_{\boldsymbol{k}}$是任意常数. 由方程的线性性质，不同模式的声波可以线性叠加，仍旧构成方程的解，即

$$\delta\rho(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\Big(A_{\mathbf{k}} \sin(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) + B_{\mathbf{k}} \cos(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\Big)$$

添加引力：

如果我们想要描述宇宙，必须要把引力的作用添加到方程中. 它的修正出现在由牛顿运动方程推导出的欧拉方程，因为我们刚刚只考虑了流体间的挤压作用. 我们有物体受到的引力$\boldsymbol{G}$满足

$$\boldsymbol{G} = \int \rho(-\boldsymbol{\nabla}\Phi)\mathrm{d}V$$

其中Φ是引力势. 将其纳入力的考察范围后，我们得到修正后的欧拉方程

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla} P - \rho\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

这里的引力势由流体自身产生，满足<u>**泊松方程**</u>

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho\,.$$

假如仍使流体没有流动、密度与压强保持均匀不变，就会有$\boldsymbol{\nabla}\Phi = 0$，与泊松方程矛盾；这意味着受到自身引力作用的流体不会永恒静止.

虽然这里出现了一个小漏洞，但是我们仍旧使用那套微扰法，让各参量在一个恒定背景下发生微小涨落，得到

$$\partial_t \delta\rho = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\bar{\rho}\mathbf{u})\,,$$

$$\bar{\rho}\,\partial_t \mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\delta P - \bar{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}\delta\Phi\,,$$

其中$\delta\Phi = \Phi - \overline{\Phi}$，满足

$$\nabla^2\delta\Phi = 4\pi G\,\delta\rho\,.$$

同样地，对于正压流体有密度涨落演化方程

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 - 4\pi G\bar{\rho}\right)\delta\rho = 0}\,,$$

对其空间部分进行傅里叶变换有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_s^2 k^2 - 4\pi G\bar{\rho}\right)\delta\rho(\mathbf{k}, t) = 0\,.$$

我们发现解的性质有一个转折点(系数正负，现场算一下)，此时的波数

$$k_{\mathrm{J}} \equiv \frac{\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}}{c_s}$$

称为**金斯尺度(Jeans scale)**. 当$k \gg k_J$时，压力作用占主导，密度涨落回到之前声波解的形式；当$k \ll k_J$时，引力作用占主导，方程变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4\pi G\bar{\rho}\right)\delta\rho = 0\,.$$

其解满足$\delta\rho \propto e^{\pm t/\tau}$, 其中$\tau = 1/\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}$. 这种密度涨落以指数形式增长的现象称为**金斯不稳定性(Jeans instability)**.

添加膨胀：

宇宙的另一大特点是膨胀，模型中的坐标是依赖于尺度因子的实际物理位置. 如果我们要在共动坐标系下研究则有关系

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\,\mathbf{x}$$

其中$\mathbf{r}$是物理坐标，$\mathbf{x}$是共动坐标，$a(t)$是尺度因子. 由哈勃定律，我们还有速度之间的关系

$$\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + \mathbf{v}$$

其中H是哈勃常数，表征了背景膨胀，$\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$是物体在膨胀的背景下独有的运动速度. 此外我们还有两个坐标系中时间偏导的关系

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f(t, a(t)\mathbf{x})}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \frac{\partial(a(t)\mathbf{x})}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right)_t \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + H\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}\right] f\,,\end{aligned}$$

以及空间偏导的关系

$$\partial_{\mathbf{x_i}} f = \frac{\partial \mathbf{r_j}}{\partial \mathbf{x_i}}\partial_{\mathbf{r_j}} f = a\,\partial_{\mathbf{r_i}} f$$

利用以上关系，经过简单的坐标变换，我们的连续性方程、欧拉方程和泊松方程有如下形式

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0}\,,$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{u} = -\frac{1}{a}\frac{\boldsymbol{\nabla}P}{\rho} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}\Phi}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\,a^2\rho\,,$$

其中$\boldsymbol{\nabla}$代表$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}$，后续同样遵循该约定.

接下来我们还是像之前那样先求稳定的背景解，之后再加入微扰研究涨落. 先让$\mathbf{v} = \mathbf{0}$使流体没有流动，得到

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} = -3H\bar{\rho}\,,$$

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{a}\frac{\boldsymbol{\nabla}\bar{P}}{\bar{\rho}} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\nabla}\bar{\Phi}\,.$$

有解(注意$\dot{a} = Ha, \mathbf{v} = \mathbf{0}$)

$$\bar{\rho} \propto a^{-3}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = Ha\mathbf{x}\,,\quad \bar{P} = \mathrm{const}\,,\quad \boldsymbol{\nabla}\bar{\Phi} = -\ddot{a}a\,\mathbf{x}\,.$$

密度反比于尺度因子的三次方，符合直观；同时引力势也满足泊松方程，只要尺度因子满足

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}\,,$$

这正是加速膨胀公式.

现在我们引入微扰

$$\rho=\bar{\rho}[1+\delta], \quad \mathbf{u}=Ha\mathbf{x}+\mathbf{v}, \quad P=\bar{P}+\delta P, \quad \Phi=\bar{\Phi}+\delta\Phi$$

其中**密度对比(density contrast)**定义为

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}.$$

仍旧只取线性项，方程化为

$$\boxed{\dot{\delta} = -\frac{1}{a}\nabla\cdot\mathbf{v}},$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{v}}+H\mathbf{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}}\nabla\delta P-\frac{1}{a}\nabla\delta\Phi},$$

消去速度得到

$$\ddot{\delta}+2H\dot{\delta}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla^2\delta P+\nabla^2\delta\Phi\right)=0.$$

同样讨论正压流体，并代入泊松方程有

$$\boxed{\ddot{\delta}+2H\dot{\delta}-\left(\frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2+4\pi G\bar{\rho}(t)\right)\delta=0}.$$

它是我们用来讨论密度涨落的主要方程.

物质扰动增长:

上述从牛顿出发推演的结果适用于非相对论流体，例如冷暗物质或解耦的重子. 本节我们通过考察上节末尾得到的方程的性质，重点研究这种流体密度涨落的演化.

金斯不稳定性：

我们仍旧对方程进行傅里叶变换，得到

$$\ddot{\delta}(\mathbf{k},t)+2H\dot{\delta}(\mathbf{k},t)+c_s^2\left(\frac{k^2}{a^2}-k_{\mathrm{J}}^2\right)\delta(\mathbf{k},t)=0,$$

其中金斯尺度k_J我们曾定义过为

$$k_{\mathrm{J}}(t)\equiv\frac{\sqrt{4\pi G\bar{\rho}(t)}}{c_s(t)}.$$

这里由于背景密度依赖于时间(同样,依赖密度的声速也依赖时间),金斯尺度也依赖于时间.

在$k/a\gg k_J$的小尺度下，方程变为带阻尼的简谐振子，其解是振幅衰减的振荡，密度涨落会逐渐消失. 在$k/a\ll k_J$的大尺度下，压强的作用可以忽略，方程变为

$$\ddot{\delta}+2H\dot{\delta}-4\pi G\bar{\rho}(t)\,\delta=0,$$

膨胀带来的摩擦项使其密度涨落不再以指数形式增长.

重子的声速强依赖于时间，导致金斯尺度是时间的强关联函数. 在重组之前，重子与光子强耦合，重子-光子流体的声速约为$1/\sqrt{3}$，金斯尺度与哈勃半径相当，亚视界尺度(subhorizon scales)内的密度涨落不增长. 重组之后，重子流体声速急剧下降，密度涨落开始增长. 而暗物质的声速与时间的关系可以忽略，导致它的密度涨落在亚视界尺度内的模式增长得更早.

线性增长函数：

接下来我们需要继续处理$k/a \ll k_J$的大尺度下的方程

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}(t)\,\delta = 0\,,$$

这是一个二阶线性常微分方程. 注意到它的系数与波矢无关，因此解有如下形式

$$\delta(\mathbf{k}, t) = \delta_+(\mathbf{k})D_+(t) + \delta_-(\mathbf{k})D_-(t)\,,$$

其中$D_\pm(t)$与波矢$\mathbf{k}$无关，分别代表增长和衰减的模式. 代表增长的D_+被称为**线性增长函数**.

物质-辐射等同时期之后是平坦的物质主导宇宙，其尺度因子与时间的关系满足$a \sim t^{2/3}$，于是

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

$$4\pi G\bar{\rho}(t) = -\frac{3\ddot{a}}{a} = \frac{2}{3t^2}$$

因此方程化为

$$\ddot{D} + \frac{4}{3t}\dot{D} - \frac{2}{3t^2}D = 0\,.$$

仅需作变换$t = e^x$，则有

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\ t^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

因此可以将方程化为二阶常系数线性微分方程

$$D'' + \frac{1}{3}D' - \frac{2}{3}D = 0$$

其中 $'$ 代表对x求导. 其特征方程满足

$$\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{3} = (\lambda - \frac{2}{3})(\lambda + 1) = 0$$

因此

$$D_+ \propto e^{2x/3} = t^{2/3} \propto a,$$
$$D_- \propto e^{-x} = t^{-1} \propto a^{-3/2}.$$

密度对比δ的涨落取决于增长项，因此正比于尺度因子；而密度涨落则$\delta\rho = \delta \cdot \bar{\rho} \propto a^{-2}$.

思考题：

- 早期辐射纪元密度涨落是如何增长的？
- 暗能量主导的扰动停止增长时期哈勃常数近似为常数，涨落如何变化？
- 对比三个时期密度涨落增速的变化，描述宇宙大尺度结构的形成过程.

统计性质：

宇宙中的大尺度结构并不是随机分布的，而是彼此相互关联的，本节将略微介绍该关联.

关联函数：

由δ的定义，我们总是有$\langle\delta\rangle = 0$，因此最简单的非平凡统计量是密度对比涨落$\delta(x,t)$在某一固定时间t的关联函数

$$\xi(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,t) \equiv \langle\delta(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}',t)\rangle = \int \mathcal{D}\delta\, \mathbb{P}[\delta]\, \delta(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}',t)\,.$$

其中δ是密度对比涨落的空间分布，是三维空间到实数的映射，$\int\mathcal{D}\delta$表示对全体这样的映射做积分，$\mathbb{P}[\delta]$表示某一特定的涨落空间分布δ出现的概率密度，$\langle\ldots\rangle$是在对由随机过程导致的随机涨落分布取系综平均. 由于宇宙的平移、旋转对称性，该平均值应该只与两个空间点的距离$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$相关，而不与具体的空间点$\mathbf{x},\mathbf{x}'$本身相关，因此ξ是良定义的. 该定义可以自然推广到更多个点之间，但此处我们只研究两个点之间的关联函数.

我们不能直接测量这一关联函数，因为我们所处的宇宙只是系综中的一个样本. 但我们假设它具有**遍历性**，即系综中的每一种情况会依照其应该出现的概率出现在无限大宇宙的各个角落，当空间趋于无穷时系综平均值等于空间平均值. 但即使有这条假设，受限于测量技术，我们仍旧只能测量有限的空间，这将引入一种统计学涨落——**样本方差**.

由于线性方程中每一个模式的演化是独立的，定义模式之间的关联函数是很有用的，(积分交换次序，先积系综) 有

$$\begin{aligned}
\langle\delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}')\rangle &= \int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3x'\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'}\,\langle\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}')\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3x'\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}'}\,\xi(r) \\
&= (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\int \mathrm{d}^3r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\xi(r) \\
&\equiv (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\mathcal{P}(k)\,,
\end{aligned}$$

其中做了一步$\mathbf{r}\equiv\mathbf{x}-\mathbf{x}'$的变换. 式中的$\delta$函数表明不同波矢$\mathbf{k}$的模式间没有关联. 函数$\mathcal{P}(k)$是**功率谱**，它是关联函数$\xi(r)$的三维傅里叶变换，由于$\xi$的旋转对称性$\mathcal{P}$也只与波矢$\mathbf{k}$的模长$k\equiv|\mathbf{k}|$有关. 它们之间有关系

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(k) &= \int \mathrm{d}^3r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\xi(r) \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}(\cos\theta)\int_0^\infty \mathrm{d}r r^2 e^{-ikr\cos\theta}\xi(r) \\
&= 2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r\frac{r^2}{ikr}\left[e^{ikr}-e^{-ikr}\right]\xi(r) \\
&= \frac{4\pi}{k}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\sin(kr)\,\xi(r)\,.
\end{aligned}$$

思考题：

- 证明

$$\xi(r) = \int\frac{\mathrm{d}k}{k}\frac{k^3}{2\pi^2}\mathcal{P}(k)\,j_0(kr)\,,$$

where $j_0(x)=\sin x/x$.

高斯随机场：

我们现在来研究一下该如何对系综进行积分. 前面说到δ是三维空间到实数的映射，若我们有一个映射$f\colon X\longrightarrow Y$，则它可以看成集合$Y^X\equiv\prod_{x\in X}Y$中的一个元素(想想这个集合里面的每个元素长什么样，位置和X对应，位置上的取值与Y对应)，概率密度$\mathbb{P}$则是集合Y^X上的一个分布. 现在我们要算 $G=g(x_1,x_2,\dots,x_n), g\colon Y^{\{x_i\in X|i\in\{1,2,\dots,n\}\equiv I\}\equiv\{x_i\}}\longrightarrow\mathbb{R}$ 的系综平均，则有

$$
\begin{aligned}
\langle G\rangle=\langle g(x_1,x_2,\dots,x_n)\rangle &= \int_Y \mathrm{d}\eta_x|_{x\in X}\mathbb{P}\,|_{y_x=\eta_x}g(x_i|_{i\in I}) \\
&= \int_Y \mathrm{d}\eta_{x_i}|_{i\in I}\left(\int_Y \mathrm{d}\eta_x|_{x\notin\{x_i\}}\mathbb{P}\,|_{y_x=\eta_x}\right)|_{y_{x_i}=\eta_{x_i}}g \\
&= \int_Y \mathrm{d}\eta_{x_i}|_{i\in I}\mathbb{P}'|_{y_{x_i}=\eta_{x_i}}\,g
\end{aligned}
$$

其中$\mathbb{P}'=\int_Y \mathrm{d}\eta_x|_{x\notin\{x_i\}}\mathbb{P}\,|_{y_x=\eta_x}$是$Y^{\{x_i|i\in I\}}$中的概率分布(容易看到$\mathbb{P}'$在$Y^{\{x_i|i\in I\}}$上积分等于$\mathbb{P}$在$Y^X$中积分，因此是归一化的概率分布).

回到我们讨论的涨落分布$\delta\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R},\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3}$，定义高斯随机分布为

$$
\mathbb{P}'(\delta_1,\dots,\delta_n)=\frac{1}{\sqrt{det(\xi_{ij})}}exp(-\frac{1}{2}\delta_i\xi_{ij}^{-1}\delta_j)
$$

其中δ_i是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3}$中的元素$\delta$的第$\mathbf{x}_i$分量，$\xi_{ij}\equiv\xi(|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|)$，指数上使用了爱因斯坦求和规则. 容易验证$\mathbb{P}'$是归一化的，并且用它算得的两点关联函数与原始定义相等. 在高斯随机分布下，所有的N点函数的系综平均值都可以用两点关联函数表示.

高斯随机分布能够很好地近似描述早期宇宙，同时线性演化将会保持高斯性质. 宇宙微波背景辐射看起来也很高斯. 但很遗憾，密度对比涨落是很不高斯的，最直观的一点是密度必须是非负的因此必须有$\delta\geq-1$，当δ很大的时候概率密度分布势必不对称且非高斯.

哈里森－泽尔多维奇谱：

对于一个线性时不变系统，我们常定义转移函数（后略）