A02. 构型空间 Q

一、数学定义：构型空间 Q

> **定义（构型空间 / 配置空间）**
> 设一个物理系统的状态在任意时刻可以由有限多个实数参数描述，这些参数构成的空间是一个光滑流形 Q，称为该系统的**构型空间（configuration space）**。

即：

- Q 是一个 n 维光滑流形；
- 每个点 $q \in Q$ 表示系统在某一时刻的一个“**几何状态**”或“**位置构型**”。
  这个定义是物理动力学几何化的起点。

二、直观理解

构型空间 Q 是**物理系统自由度的集合**，但用几何结构精确刻画。

- **自由质点**：运动在 $\mathbb{R}^3$ 中，则 $Q = \mathbb{R}^3$；
- **刚体在平面中转动**：$Q = \mathbb{R}^2 \times S^1$（平移 + 旋转角）；
- **摆锤**：摆角取值 $\theta \in S^1$，所以 $Q = S^1$；
- **双摆系统**：两个独立摆角，$Q = S^1 \times S^1$；
- **n粒子系统**：若粒子在 $\mathbb{R}^3$ 中，构型空间是 $Q = (\mathbb{R}^3)^n$。

> 简言之：**每个点 $q \in Q$ 是物理系统“瞬时配置”的抽象化编码。**

三、构型空间的数学性质

由于我们后续将在 Q 上做微分操作（如导数、变分等），所以要求：

条件	原因
Q 是 Hausdorff 空间	保证点可分离、拓扑良好
Q 是第二可数的	保证有良好的可数图册，便于分析
Q 是光滑流形	可定义导数、切丛、拉格朗日函数

四、在构型空间上能做什么？

构型空间上可以构造出系统演化的各种结构：

对象	定义在 Q 上的结构	含义
切丛 TQ	所有速度向量的集合	每个 $q \in Q$ 上的 $\dot{q}$ 的不交并空间
动力学轨迹	映射 $q : \mathbb{R} \to Q$	粒子的运动路径
力场 / 约束	张量、形式等	对运动施加结构的方式

五、在拉格朗日力学中的角色

在力学的几何语言中，构型空间 Q 是后续所有结构的起点：

层级	结构	含义
0 阶	Q	构型空间，粒子位置
1 阶	TQ	速度空间，定义 $L(q, \dot{q})$
2 阶	TTQ 或 J^2Q	加速度空间，用于欧拉–拉格朗日方程
路径	$q : \mathbb{R} \to Q$	轨迹，是变分对象
泛函	$S[q] = \int L$	作用泛函，用于变分原理求解轨迹

构型空间本身不带动力学，而是一个**底层的纯几何舞台**。

示例：自由质点运动

我们继续用该例子作为通用贯穿：

> 例：一粒子在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中自由运动。

- 构型空间：$Q = \mathbb{R}^2$；
- 每个构型 $q = (x, y) \in Q$ 表示粒子的位置；
- 轨迹是映射 $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，即 $t \mapsto (x(t), y(t))$；
- 接下来我们将构造：

- 切丛 $TQ \ni (q, \dot{q})$
- 拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m |\dot{q}|^2$
- 泛函 $S[q] = \int L, dt$

小结

项目	内容
定义	系统的状态空间，是一个光滑流形 \$Q\$
几何角色	变分结构的基底空间，承载轨迹与导数
必要条件	Hausdorff, 第二可数, 光滑结构
后续操作	构造切丛 TQ、Jet丛 $J^1 Y$、拉格朗日密度等
示例	二维空间粒子运动 $\Rightarrow Q = \mathbb{R}^2$，自由度 = 2