A03. 构型丛

构型丛（configuration bundle）是拉格朗日力学中**将“时间”与“构型”结合为一个几何整体**的方式，它使我们能在**几何语言中统一描述轨迹、导数和变分。**

一、数学定义

> **定义（构型丛）**
> 设：

```
* $X$ 是一个光滑流形（在力学中通常是时间轴 $\mathbb{R}$）；
* $Q$ 是一个光滑流形（配置空间）；
* 定义总空间为 $Y := X \times Q$，投影映射为：$$
```

\pi: Y = X \times Q \to X,\quad (t, q) \mapsto t
$则$$\pi : Y \to X$ 是一个**平凡的光滑纤维丛**，称为**构型丛。**

更一般地，我们也可以允许 Y 是非平凡丛，但在经典力学中通常是平凡丛。

二、构型丛的结构图像

- **底空间** X 是时间轴；
- **每个点** $x \in X$ 上方是一个纤维 Q；
- **总空间** Y 由所有时刻的构型空间拼接而成；
- **截面** $\phi : X \to Y$ 选出每个时刻的状态点。

常用的纤维丛结构表示符号

我们将一个纤维丛（特别是主丛、向量丛、构型丛等）用如下结构表达：

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$$

其中：

- F 是典型纤维（fiber）；
- E 是总空间（total space）；
- B 是基底空间（base space）；
- $\pi: E \to B$ 是丛投影；
- $F \hookrightarrow E$ 表示“每一点处的纤维嵌入于总空间”；
- 整个结构可以理解为“E 是局部同胚于 $B \times F$ 的空间”。

这个弯弯的箭头 $\hookrightarrow$ 不是标准函数，而是表明结构上的**嵌入关系（inclusion-like structure）**。

示例：构型丛的表示

在拉格朗日力学中，构型丛常写作：

$$Q \hookrightarrow Y \xrightarrow{\pi} X$$

即：

- 总空间 Y（构型丛）；
- 基底 X（时间轴）；
- 纤维 Q（每个时刻的配置空间）；
- 投影 $\pi: Y \to X$；
- 每个纤维 $\pi^{-1}(x)$ 同构于 Q。

何时使用这个记号

这种结构符号主要用于：

- 描述某类丛的全局结构（主丛、向量丛、构型丛）；
- 强调“有某种纤维结构”的空间；
- 表示“E 是由 B 和 F 局部拼接成的”，而非全局积空间。

三、直观解释：为何需要构型丛？

我们可以将构型丛理解为：

> **“系统可能演化的所有时刻与构型组合成的空间”**。

- 在经典力学中，我们希望描述“粒子如何随时间变化”；
- 但几何语言中，我们希望所有结构是“空间上的对象”；
- 构型丛让我们用**一个截面** ϕ 来统一表示整个轨迹。

四、局部坐标表示

设：

- $\dim X = 1$（时间），取局部坐标 t；
- $\dim Q = n$，取局部坐标 q^i，$i = 1, \dots, n$；
- 则构型丛 $Y = X \times Q$ 上的局部坐标为：$$
(t, q^1, \dots, q^n)

一个截面为：

$$
\phi : t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t))
$$

五、在拉格朗日力学中的作用

构型丛是**变分结构的几何基础**：

对象	定义	含义
$Y = X \times Q$	构型丛	描述“时间+状态”的组合结构
$\phi : X \to Y$	丛的截面	粒子轨迹 $t \mapsto q(t)$
TY	构型丛切丛	定义速度方向
$VE = \ker d\pi$	垂直丛	描述变分方向
J^1Y	Jet丛	描述导数结构

后续所有“导数”“变分”“拉格朗日密度”都将在这个丛上构造。

六、物理示例

继续我们贯穿的例子：

> 一质点在平面中自由运动，构型空间为 $Q = \mathbb{R}^2$。

则：

- 时间轴：$X = \mathbb{R}$；

- 构型丛：$Y = X \times Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$；
- 投影：$\pi(t, x, y) = t$；
- 截面：$\phi(t) = (t, x(t), y(t))$；
- ϕ 表示粒子的运动轨迹。

小结

项目	内容
对象	构型丛 $Y = X \times Q$
投影	$\pi : Y \to X$，取出时间
截面	$\phi(t) = (t, q(t))$，粒子轨迹
几何意义	把“演化”看作“丛的截面”
功能	提供统一几何框架给变分与导数结构