A04. 截面

截面是构型丛结构中的主角。在拉格朗日力学中，**系统的演化轨迹就是构型丛的一个截面**。下面我们从严格定义开始，再深入其几何结构和物理意义。

一、严格数学定义：丛的截面

> **定义（截面 / Section）**
> 设 $\pi : Y \to X$ 是一个纤维丛（总空间为 Y，基底为 X），则一个**截面**是一个光滑映射：
>
> $$\Phi : X \to Y \quad \text{满足} \quad \pi \circ \Phi = \mathrm{id}_X$$
>
> 即：
>
> $$\forall x \in X, \quad \pi(\Phi(x)) = x$$

换句话说：截面 ϕ 为每个基底点 $x \in X$ 选择一个“垂直方向上的”点 $\phi(x) \in \pi^{-1}(x) \subset Y$。

截面映射的性质

定义性质： $\pi \circ \Phi = \mathrm{id}_X$

局部性质：截面不总是定义在整个底空间 B 上

平凡丛的截面：对于平凡丛，截面映射相当于选择一个从底空间到纤维（而非丛或总空间）的映射 $\Phi : B \to F$

二、几何直观图像

- 对于每个 $x \in X$，截面选择一个 $\Phi(x) \in Y$；
- 这个点正好位于纤维 $\pi^{-1}(x)$ 中；
- 截面就是一条“横跨所有纤维”的光滑曲线。

三、在拉格朗日力学中的作用

在拉格朗日力学中，我们有构型丛：

$$Q \hookrightarrow Y \xrightarrow{\pi} X \quad \text{其中 } Y = X \times Q$$

一个截面：

$$\Phi : X \to Y, \quad \Phi(t) = (t, q(t))$$

就描述了**系统随时间演化的轨迹**。

换句话说：

> **运动轨迹 = 构型丛的截面**
> 把“系统状态随时间的演化”看作“丛中截面所描出的曲线”。

四、局部坐标表示

设：

- $X \subseteq \mathbb{R}$ 是时间轴，有坐标 t；
- Q 有坐标 q^i，$i = 1, \ldots, n$；
- 构型丛 $Y = X \times Q$ 上坐标为 (t, q^i)。
  则一个截面为：

$$\Phi(t) = (t, q^1(t), \ldots, q^n(t))$$

这正是熟悉的轨迹表示 $q(t)$，但现在是以几何丛的语言表达。

关于局部坐标表示的进一步讨论

由于纤维丛理论常常涉及多个流形，因而涉及很多套atlas，只使用 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ 作为局部坐标图的记号容易引起混淆，因而，本书后问内容采用以下记号习惯：

- 底空间 B （通常也记为 X）流形上的局部坐标图（册）

$$\{U_i, \phi_i\}$$

- 总空间 E （通常也记为 Y）流形上的局部坐标图（册）

$$\{\pi^{-1}(U_i), \varphi_i\}$$

- 典型纤维 F 流形上的局部坐标图（册）

$$\{\psi_\alpha\} \quad \text{（分析力学的讨论范围内典型纤维上常可以定义全局坐标 } \psi\text{）}$$

- 截面映射（尽管并不是坐标图）

$$\Phi : B \to E$$

在这样的记号体系下，截面映射 $\Phi : B \to E$ 的局部坐标表示可以按照如下步骤进行：

1. $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i \subset B, \quad (b^1, \ldots, b^m) \mapsto b$
2. $\Phi : U_i \to \pi^{-1}(U_i) \subset E, \quad b \mapsto e$
3. $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F, \quad e \mapsto (b, f)$
4. $\mathrm{pr}_1 : U_i \times F \to U_i, \quad \mathrm{pr}_2 : U_i \times F \to F$
5. $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m, \quad b \mapsto (b^1, \ldots, b^m); \qquad \psi : F \to \mathbb{R}^n, \quad f \mapsto (f^1, \ldots, f^n)$

我们通常只关心最后一步中关于典型纤维的部分，这部分的局部坐标表示即：

$$\psi \circ \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \Phi \circ \phi_i^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (b^1, \ldots, b^m) \mapsto (f^1, \ldots, f^n)$$

五、示例

> **例：二维平面自由质点**

- 构型空间 $Q = \mathbb{R}^2$，坐标为 (x, y)；
- 构型丛 $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$；
- 截面 $\phi(t) = (t, x(t), y(t))$；
- 满足 $\pi(\phi(t)) = t$，即“取出时间分量”。

你可以把 ϕ 看成一条“嵌入在总空间 Y 中”的曲线，它在 t 时刻落在 t 的纤维上。

六、截面的后续几何角色

截面是后续结构的基础：

对象	依赖截面的结构
Jet 延拓 $j^1\phi$	给出 ϕ 的导数结构（位置 + 速度）
拉格朗日泛函 $S[\phi]$	以截面为输入进行积分
变分 $\delta\phi$	是截面的小扰动，在垂直丛中取值
欧拉–拉格朗日方程	是作用泛函对截面的泛函导数为零的条件

小结

项目	内容
定义	$\phi : X \to Y$, 满足 $\pi \circ \phi = \mathrm{id\_}X$
几何意义	为每个 $x \in X$ 选择一个纤维上的点
拉格朗日力学中	截面 $\phi(t) = (t, q(t))$ 表示轨迹
功能	构建 Jet 延拓、作用泛函、变分等结构的起点