B01. 切丛 TY

这是导数结构中的第一项，拉格朗日力学中所有“速度”“变分方向”“导数信息”的基础，都是从切丛开始构建的。

一、严格数学定义：切丛 TY

> **定义（切丛 / Tangent Bundle）**
> 设 Y 是一个 n-维光滑流形。其**切丛** TY 是一个新的 $2n$-维光滑流形，定义为：
>
> $$TY := \bigsqcup_{y \in Y} T_y Y$$
>
> 即：所有点 $y \in Y$ 上的切空间 $T_y Y$ 的不交并。
>
> 并且有自然投影：
>
> $$\pi_Y : TY \to Y, \quad v \in T_y Y \mapsto y$$
>
> 每个点 $y \in Y$ 上的纤维 $\pi_Y^{-1}(y) \cong T_y Y$ 是一个向量空间。

因此，TY 是一个以 Y 为基底的向量丛（vector bundle）。

前置：向量丛（Vector Bundle）

正式定义

> **定义（向量丛）**
> 设 E, B 是光滑流形，记映射 $\pi : E \to B$。
> 若满足：

1. **每个点上方的纤维是向量空间**：对每个 $b \in B$，纤维 $E_b := \pi^{-1}(b)$ 是一个有限维实向量空间（通常是 $\mathbb{R}^n$）；
2. **局部平凡性（local triviality）**：存在一组开集 $\{U_\alpha\}$ 覆盖 B，以及微分同胚：

   $$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

   使得如下图交换：

   $$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \stackrel{\varphi_\alpha}{\to} & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{proj}_1 \\ U_\alpha & = & U_\alpha \end{array}$$

并且：

1. 每个纤维 $\pi^{-1}(b)$ 被映射为 $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ 上的线性空间；
2. 每个 φ_α 在纤维方向是**线性同构**（即可逆 且 保向量加法和数乘运算）。

则称 $\pi : E \to B$ 是一个秩为 n 的**向量丛**，总空间 E，基底 B

直观解释

向量丛可以想象为：

> **在每个基底点上，挂一个向量空间**，但允许这些向量空间的拼接方式在全局上发生“扭曲”。

一个“向量丛”就是这样的结构拼起来的总空间
为了满足每个局部都“看起来像直积空间 $U_i \times \mathbb{R}^n$”需要满足两个条件：

1. 局部平凡化是微分同胚
2. 局部平凡化在纤维方向上是线性同构

> **向量丛是带有线性结构的特殊纤维丛。**

性质	纤维丛	向量丛
纤维结构	任意拓扑空间	向量空间
局部结构	$U_\alpha \times F$	$U_\alpha \times \mathbb{R}^n$，且线性
过渡函数取值于	$\mathrm{Homeo}(F)$	$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$
应用	各类“场”的几何抽象	向量场、切丛、张量丛、规范场

向量丛上的典型操作

1. **截面（section）**：映射 $s : B \to E$，满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$
   代表“每个点上选一个向量” → 即**向量场**。
2. **切丛** TM 是向量丛：
   每个点 $p \in M$ 的切空间 T_pM 是一个向量空间，拼起来就是 TM。
3. **余切丛** T^*M：张量丛、形式丛等也是向量丛。

项目	内容
对象	向量丛 $\pi : E \to B$，每纤维为向量空间
核心性质	局部平凡性 + 线性结构
局部结构	$\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$
示例	切丛、余切丛、张量丛

项目	内容
用途	描述“向量场”“速度”“扰动方向”“规范场”等结构

切丛作为向量丛

二、局部坐标表示

设切丛 TY 上的一点 $e \in TY$ 且 $\pi(e) = y \in U_i$
则 e 通过局部平凡化映射 φ_i 被映射到 $(y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ，对应的坐标表示为：

$$y = \phi_i(y), \quad \dot{y}^j = \langle \dot{y}, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_y \rangle$$

换言之：

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_i : \pi^{-1}(U_i) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ e \in T_yY &\longmapsto \left(\phi_i(y),\ \dot{y}^j = \left\langle e, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_y \right\rangle\right) \end{aligned}}$$

或者：

$$\boxed{\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_i = \phi_i \circ \pi, \qquad \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_i(e) = \left(\left\langle e, \frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_y \right\rangle, \dots, \left\langle e, \frac{\partial}{\partial y^n}\bigg|_y \right\rangle\right)}$$

其中：

- $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是第一分量投影；
- $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是第二分量投影；
- $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_y \right\}$ 是由局部坐标诱导的切空间基；
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是在 TY 的点上定义的“坐标展开内积”，或者说表示该向量在该基底下的坐标分量。

三、几何直观

你可以把 TY 想象为在每个点 $y \in Y$ 上“插了一根箭头”的空间：

- 每个点 y 上附着一个切空间 T_yY；
- 所有这些拼接在一起，形成总空间 TY；
- 它是一个 $2n$-维光滑流形。

四、在拉格朗日力学中的作用

在拉格朗日力学中，轨迹是 $\phi : X \to Y$ 的一个截面。

- 其微分 $d\phi : TX \to TY$ 把“时间上的变化”映射到“状态上的变化”；
- 它的像 $d\phi(t) \in T_{\phi(t)}Y$ 就是**系统在 t 时刻的切向量**；
- 这包含了“速度”“运动方向”的信息。

例如：

> 粒子轨迹 $\phi(t) = (t, x(t), y(t)) \in Y$
> 其速度向量为：
>
> $$d\phi(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right) \in T_{\phi(t)}Y$$

五、拉格朗日函数是切丛上的函数

拉格朗日函数的本质是定义在“位置 + 速度”上，因此：

> **拉格朗日函数是定义在切丛上的函数**：
>
> $$L : TY \to \mathbb{R}$$

它告诉我们：系统在某个状态 $y \in Y$ 及其速度方向 $v \in T_yY$ 下的“能量代价”或“动作密度”。

六、物理例子（自由质点）

> 自由质点在平面中运动，$Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$，坐标为 (t, x, y)。

- 切丛 TY 的坐标为 $(t, x, y; \dot{t}, \dot{x}, \dot{y})$；
- 对于轨迹 $\phi(t) = (t, x(t), y(t))$，其导数为：

$$d\phi(t) = \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \in T_{\phi(t)}Y$$

- 拉格朗日函数 L 定义为：

$$L(t, x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

注意我们常常约定 $\dot{t} = 1$，所以 t 本身不是动力学自由度。

小结

项目	内容
定义	$TY := \bigsqcup\_y \in YT\_yY$ 是切空间的总丛
投影	$\pi\_Y : TY \to Y$
坐标	(y^i, v^i)
几何意义	每点附有一个方向，形成“速度空间”