B02. 切映射

一、丛映射

I. 丛映射：定义

> 设 $\pi_E : E \to B$、$\pi_{E'} : E' \to B'$ 是两个**光滑**纤维丛。
> 若存在两个**光滑**映射：
>
> - $\Psi : E \to E'$（作用在总空间）
> - $\psi : B \to B'$（作用在底空间）
>
> 满足如下交换图：
>
> $$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & E' \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_{E'} \\ B & \xrightarrow{\psi} & B' \end{array} \quad \text{即满足} \quad \pi_{E'} \circ \Psi = \psi \circ \pi_E$$
>
> 则称 Ψ 是从 $E \to B$ 到 $E' \to B'$ 的一个 **丛映射**，记作：
>
> $$(\Psi, \psi) : E \to E' \quad \text{or simply } \Psi : E \to E' \text{ over } \psi$$

核心要求：$\pi_{e'} \circ \Psi = \psi \circ \pi_E$ （丛映射后的投影等于投影后的底映射）

记号：$\psi : B \to B'$ 是底空间的映射，$\Psi : E \to E'$ 是总空间的映射，习惯上称 Ψ 为 "ψ 上方的丛映射"

丛映射 Ψ 把每个纤维中的点 $e \in E_b$ 送到对应底点 b 映射后所在的纤维 $E'_{\psi(b)}$ 中。 它确保总空间的变化与底空间的映射兼容，像是纤维在“随底滑动”

II. 丛映射：性质

若 $\Psi : E \to E'$ 是一个 over ψ 的丛映射，则：

（1）纤维之间相互映射：$\Psi(E_b) \subset E'_{\psi(b)}$

1. 纤维之间相互映射：
   对于任意 $b \in B$，我们有：

$$\Psi(E_b) \subset E'_{\psi(b)}$$

   即：每个点上纤维 $E_b = \pi_E^{-1}(b)$，会被 Ψ 映射进 $E'_{\psi(b)} = \pi_{E'}^{-1}(\psi(b))$。

（2）若 $\psi = \mathrm{id}_b$，则定义在 E 上的截面可以被推送到 E' 上

1. 截面可以“推送”：
   若 $s : B \to E$ 是 E 上的一个截面（即 $\pi_E \circ s = \mathrm{id}_B$），则：

$$\Psi \circ s : B \to E' \quad \text{是 over } \psi \text{ 的一个截面候选}$$

   但一般不是截面，除非 $\psi = \mathrm{id}_B$。

III. 向量丛映射：丛映射的特殊情况

若 ψ 是微分同胚，且每纤维 $\Psi_b : E_b \to E'_{\psi(b)}$ 是线性映射，则 Ψ 是向量丛映射。

这在向量丛或切丛之间很常见（例如 $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$）。

（1）底空间间的映射 $\psi : B \to B'$ 是微分同胚（即双射且正反函数均光滑）

（2）Ψ 对于限制在每条纤维时的情况 $\Psi_b : E_b \to E'_{\psi(b)}$ ，要求该映射是线性映射

向量丛映射（直观）：向量丛映射是一个“跟着底空间变化、纤维上又保持线性结构”的映射

二、切映射：定义

I. 前置：函数的拉回

函数的拉回（定义）： $\Phi^* f := f \circ \Phi$

设：

- $\Phi : X \to Y$ 是光滑流形之间的**光滑映射**；
- $f \in C^\infty(Y)$ 是 Y 上的光滑函数。

则**函数 $f \in Y$ 关于 $\Phi : X \to Y$ 的拉回**（pullback）定义为：

$$\boxed{\Phi^* f := f \circ \Phi \in C^\infty(X)}$$

也就是说：

- 把 Y 上的函数 f 通过 Φ 拉回到 X 上；
- 得到的复合函数 $f \circ \Phi$ 仍然是 X 上的光滑函数。

这是最基础的拉回操作，常称为：

> $\phi^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ 是函数环之间的代数同态。

函数的拉回（直观）：函数 $f:Y\to\mathbb{R}$ 关于 $\Phi:X\to Y$ 的拉回 Φ^*f 就是“绕着映射 Φ 先走再根据 f 取值”

II. 切映射 $\mathrm{d}\Phi$：构造动机

> 给定两个流形 X 和 Y，以及一个光滑映射 $\Phi:X\to Y$，
> 如何理解 Φ 在微分结构上的作用？
> 换句话说，**如何让 Φ （诱导一个新映射）把 X 上的“方向信息”传递到 Y**”？

（1）动机来源：方向导数的传递

对于定义在 Y 上的任意光滑函数 $f:Y\to\mathbb{R}$，它在某点 y 上的“方向信息”就是 T_yY 上的各种切向量作用在该函数上的效果的信息；
同时我们知道，流形间的映射 Φ ，对于每一个光滑映射 $f\in C^\infty(Y)$ 都自然地诱导了一个拉回映射 $\Phi^*f=f\circ\Phi$：

$$f\circ\Phi:X\to\mathbb{R}$$

称为 f 关于 Φ 的拉回映射，且 $\Phi^*f\in C^\infty(X)$；
同理可知该函数在某点 x 上的所谓“方向信息”就是 T_xX 上的各种切向量作用于该函数的效果

我们希望作的是，能否通过 $\Phi:X\to Y$ 诱导一个函数 $\mathrm{d}\Phi:TX\to TY$，将任意 $v\in T_xX$ 被映射到这样一个向量（记作 $\mathrm{d}\Phi|_x(v)$）：

> 它应该能作用在 f，并得到与 v 作用在 $f\circ\Phi$ 一致的结果，即：
>
> $$\boxed{(d\Phi|_x(v))[f]:=v[f\circ\Phi]}$$

这就定义了一个 $T_{\Phi(x)}Y$ 上的切向量

（2）换句话说：给出流形间（点间）的映射 Φ，我们希望由它构造空间上“方向导数”（即切空间中的切向量）之间的映射，使满足切向量的映射 $\mathrm{d}\Phi|_x(v)$ 作用于 $f\in C^\infty(Y)$ 等于切向量 $v\in T_xX$ 作用于函数的拉回 Φ^*f

> Φ 把 $x\in X$ 映到 $y=\Phi(x)\in Y$，
> 那么 x 处的“方向” $v\in T_xX$ 应该被送到 y 处的“方向” $(d\Phi|_x)(v)\in T_yY$，
> 使得它“看”任何函数 $f:Y\to\mathbb{R}$ 的方式就是原来的 v 看 $f\circ\Phi$ 的方式。

切映射：定义

回顾：构造切映射的核心

$$\boxed{(d\Phi|_x(v))[f] := v[f \circ \Phi] \quad \text{for all } f \in C^\infty(Y)}$$

这个定义自然满足：

- $(d\Phi|_x) : T_xX \to T_{\Phi(x)}Y$ 是线性映射；
- 拼在一起得到一个总映射 $d\Phi : TX \to TY$，称为 Φ 的**切映射**。

切映射：正式定义

设 $\Phi : X \to Y$ 是光滑映射，则其微分 $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$ 是一个 **丛映射**，满足：

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \pi_Y \circ \mathrm{d}\Phi = \Phi \circ \pi_X \quad (\text{丛映射条件}) \\ (2)\ \text{对每个 } x \in X, \quad \mathrm{d}\Phi|_x : T_xX \to T_{\phi(x)}Y \text{ 是线性映射}\end{array}}$$

条件（2）更具操作性的等价表述：

$$\boxed{(2)\ \text{对每个 } h \in C^\infty(Y), v \in T_xX, \quad v[h \circ \Phi] = (\mathrm{d}\Phi|_x(v))[h]}$$

（1）切映射是切丛间的丛映射

（2）切映射是线性映射 = 切映射满足 $v[h \circ \Phi] = (\mathrm{d}\Phi|_x(v))[h]$

三、切映射：局部坐标表示

后文中我们尽量采用如下符号体系：

- 若光滑映射 $\Phi : X \to Y$，则
  - 将映射定义域 X 上点的局部坐标记为 x^i
  - 将映射像空间 Y 上点的局部坐标记为 x^a
  - 将光滑映射的坐标表示记为 $\Phi^a, \Phi(x^i)^a = y^a$
- 若 $\pi : Y \to X$ 是纤维丛，则
  - 将底空间 X 上的点的局部坐标记为 x^i
  - 将全空间 Y 上的点的局部坐标记为 $y^a = (x^i; y^\mu)$，其中
    - 将点在纤维 Y_x 上的局部坐标记为 y^μ

I. 切映射的局部坐标表示：问题设定

- 设 $\Phi : X \to Y$ 是光滑流形之间的光滑映射；
- $x \in X$，$\Phi(x) \in Y$；

- $\{x^i\}$ 是 X 的局部坐标，维数为 n；
- $\{y^a\}$ 是 Y 的局部坐标，维数为 m；
- $v \in T_x X$，其坐标表达为 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$

> 注意，这里我们直接将 **底空间上的局部坐标图** 写作分量形式 $\{x^i\}$ 其中 $x^i : X \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$；$Y$ 以此类推；这么做的好处是在具体计算中带来记号上的便利

我们要求切映射满足 **定义性质**：

$$(d\Phi(v))[h] := v[h \circ \Phi], \quad \forall h \in C^\infty(Y)$$

我们想要明确求出 $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$ 的明确坐标表示，等效于求它在每条纤维上的行为 $\mathrm{d}\Phi|_x : T_x X \to T_{\Phi(x)} Y$ 的坐标表示，也就是求对于任意切向量 $v \in T_x X$：

$$\mathrm{d}\Phi(v) \in T_{\Phi(x)} Y \quad \text{在坐标基下的表示.}$$

也就是求 $\mathrm{d}\Phi|_x$ 如何将 $v \in T_x X$ 映到 $w^a \frac{\partial}{\partial y^a}\Big|_{\Phi(x)}$
因此，所谓求切映射的局部坐标表示，就是想将切映射写作：

$$\mathrm{d}\Phi|_x(v) = (\mathrm{d}\Phi|_x)^a(v) \frac{\partial}{\partial y^a}\Big|_{\Phi(x)}$$

同时由于我们知道 **切映射是线性映射** ，我们可以预想到：

$$\mathrm{d}\Phi|_x(v) = (\mathrm{d}\Phi|_x)^a_i v^i \frac{\partial}{\partial y^a}\Big|_{\Phi(x)}$$

另外，在求切映射的局部坐标表示时，出于方便考虑，常将 $\mathrm{d}\Phi|_x$ 直接写作 $\mathrm{d}\Phi_x$ 甚至 $\mathrm{d}\Phi$

II. 求解

为求上式中的 $\mathrm{d}\Phi^a$ 或 $\mathrm{d}\Phi^a_i$ ，只需在在定义性质 $v[f \circ \Phi] = \mathrm{d}\Phi|_x(v)[f]$ 中代入 $f := y^b$ 即可

RHS： $\mathrm{d}\Phi^a(v)$

LHS： $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}[\Phi^a(x)]$

由于 y^j 是 Y 的局部坐标，$\Phi : X \to Y$，所以：

$$y^a \circ \Phi : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y^a(\Phi(x)) =: \Phi^a(x)$$

即，记$\Phi^a := y^a \circ \Phi$ 是 Φ 的**第 j 个分量函数。**
这部分信息是由 Φ 和 y^j 给出的，在当前语境下是已知信息

结论： $\mathrm{d}\Phi^a(v) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}[\Phi^a(x)]$

比较等式两边，我们得到：

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi^a(v) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}[\Phi^a(x)]}$$

III. 结论

结论：切映射的局部坐标表达为

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi^a(v) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}[\Phi^a(x)]}$$

结论（另一种表述）

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi(v) = \left(v^i \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial y^a}}$$

如果将 v^i 视作一个（ n 行）列矩阵（考虑到在不存在前后关系的情况下，我们一般将上指标视为行标），那么 $\mathrm{d}\Phi|_x$ 的坐标表示可以视为一个 $m \times n$ 的矩阵，则上式可以视为一个矩阵乘法表达式：

$$\mathrm{d}\Phi(v) = (\partial_a)(\mathrm{d}\Phi^a_i)(v^i)$$

其中 $(\mathrm{d}\Phi^a_i)$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，(v^i) 是一个 $n \times 1$ 矩阵；因此 $(\mathrm{d}\Phi^a_i)(v^i)$ 是一个 $m \times 1$ 矩阵；而 $\partial_a = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ （可以想像为）是 $T_{\Phi(x)}Y$ 上的基向量排成的 $1 \times m$ 矩阵 ；因此整个矩阵积得到的确实是 $T_{\Phi(x)}Y$ 上的切向量。

直观表述：两个光滑流形间的映射对应的切映射 $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$ ，在局部坐标下的表达就是流形映射 Φ （对应的坐标映射）的雅可比矩阵（Jacobian matrix）

更准确地说：

- 在局部坐标图中：
  - 若 x^i 是 X 上的坐标；
  - y^a 是 Y 上的坐标；
  - 且 Φ 的局部表达为：

$$y^a = \Phi^a(x^1, \ldots, x^n)$$

- 那么 $\mathrm{d}\Phi|_x : T_xX \to T_{\Phi(x)}Y$ 是一个线性映射，其在基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 与 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^a}\right\}$ 下的矩阵表示就是：

$$J^j{}_i(x) := \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i}$$

也就是说：

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi|_x(v) = \left(\frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i}(x)\cdot v^i\right)\frac{\partial}{\partial y^a}}$$

记号体系延伸：坐标变换与雅各比矩阵

这也是为什么物理中也常常将坐标变换 Φ 诱导的雅各比矩阵 J 记作 $\mathrm{d}\Phi$：

$$J^i_j = (\mathrm{d}\Phi)^i{}_j := \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j}$$

其中 $\Phi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是坐标变换的分量表示

IV. 另一种求解思路

（1）由于 $\mathrm{d}\Phi|_x : T_xX \to T_{\Phi(x)}Y$ 是线性映射，要求其对任意切向量作用的坐标表示，只需确定它对该点的切向量基的作用效果，即 $\mathrm{d}\Phi_x(\frac{\partial}{\partial x^i})$

（2）类似上一种方法的过程，只需在切映射的定义性质 $\mathrm{d}\Phi(v)[h] = v[h\circ\Phi]$ 中代入 $h = y^a$ 即可

（3）LHS = $\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i)[y^a]$，RHS = $\partial_i[\Phi^a]$

（4）我们的目标是求 $\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i) = (\mathrm{d}\Phi_x)^b_i\partial_b$

（5）将目标式两端都作用于 y^a，得到 $\mathrm{LHS}_{\text{traget}} = \mathrm{LHS}$，$\mathrm{RHS}_{\text{target}} = (\mathrm{d}\Phi_x)^a_i$

（6）由于目标式左边等于原式左边，可知目标式右边等于原式右边，因此有 $(\mathrm{d}\Phi_x)^a_i = \partial_i[\Phi^a]$

（7）回代回目标式得到 $\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i) = \partial_i[\Phi^a]\partial_a$

结论

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i) = \partial_i[\Phi^a]\partial_a}$$

将 X 上的任意切向量 $v = v^i\partial_i$ 代入可恢复第一种方法得到的结论

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi(v) = v^i \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^a}}$$

V. 切映射的坐标表示：示例

设 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，定义为极坐标变换：

$$\Phi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

则：

- 输入切向量 $v = a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{\partial}{\partial \theta} \in T_{(r,\theta)}\mathbb{R}^2$
- 输出为：

$$d\Phi(v) = (a\cos\theta - br\sin\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (a\sin\theta + br\cos\theta)\frac{\partial}{\partial y} \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$$

这就是坐标变换下的切向量变换。

四、截面 $\Phi : X \to Y$ 的切映射 $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$

对于任意流形间的光滑映射 $\Phi : X \to Y$，尽管其诱导的 **切映射** $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$ **天然是丛映射**；但在切映射的定义中，并没有要求光环流形 X, Y 是一个纤维丛的底空间和总空间，Φ 未必是纤维丛的截面。
但是，在理论力学语境下，我们更关心这样一类切映射：诱导该切映射的光滑映射 Φ 是一个纤维丛 $\pi : Y \to X$ 上的截面 $\Phi : X \to Y$.

I. 截面切映射的定义和直观理解

给定一个光滑映射 $\Phi : X \to Y$，我们可以定义其 **切映射** $\mathrm{d}\Phi : T_xX \to T_yY$，它描述了在点 $x \in X$ 处的微小变化如何通过 Φ 影响点 $y = \Phi(x) \in Y$。

切映射 $\mathrm{d}\Phi$ 是一个从 T_xX 到 T_yY 的线性映射，它将底空间 X 上的切向量映射到总空间 Y 上的切向量。在几何上，$\mathrm{d}\Phi$ 描述了底空间 X 和总空间 Y 中相应点的变化率。

II. 截面的切映射 $\mathrm{d}\Phi|_x \in \mathrm{Hom}(T_xX, V_yY)$

- T_xX 是底空间 X 上点 x 的切空间。
- V_yY 是总空间 Y 上点 y 处的垂直子空间，即与投影映射 $\pi : Y \to X$ 垂直的切空间。

我们指出（稍后证明）：$\mathrm{d}\Phi$ 是一个从底空间切空间 $T_x X$ 到总空间垂直空间 $V_y Y$ 的线性映射。它满足线性映射的性质，并且通过映射 $T_x X$ 中的向量到 $V_y Y$ 中的向量来实现。

（1）对任意切映射（不需要是截面的切映射），都有 $\mathrm{d}\Phi|_x : T_x X \to T_{\Phi(x)} Y$

（2）截面切映射对坐标基向量的作用

引用 **切映射 $\mathrm{d}\Phi|_x$ 作用于 X 的局部坐标基向量 $\{\partial_i\}$ 的效果** 的结论，即：

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i) = \partial_i[\Phi^a]\partial_a}$$

在该式中，若 $\Phi : X \to Y$ 是一个截面，则等式右边

$$\frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \partial_i + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \partial_\mu$$

它的含义是：

- **第一项** ∂_i：表示在 Y 中沿着 x^i 的方向前进；
- **第二项** $\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \partial_\mu$：表示前进时会附带地沿着纤维方向“上浮”或“下沉”。

想象你在一个山坡上散步，x^i 是地面的坐标，而 y^μ 是山坡的高度。

- 沿 x^i 方向前进时，你的路径不仅在地面上移动（∂_i），也可能随着山坡的斜率 $\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i}$ 而向上或向下（∂_μ）。
- 你并没有完全“离开”地面，而是“贴着地形”走，这种“贴地而动”的方式就是截面的几何本质。

一个截面的切映射并不单纯平行于底空间，而是沿底空间方向前进的同时，根据纤维方向的变化斜率向上或向下“偏移”

五、物理示例：二维质点

> 自由粒子在二维空间中运动，轨迹为：

$$\phi(t) = (t, x(t), y(t))$$

则：

- 微分映射为：

$$d\phi(t) : \partial_t \mapsto (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \in T_{\phi(t)} Y$$

- 拉格朗日函数定义在此点上：

$$L(t, x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

六、与 Jet 丛的联系

Jet 丛 J^1Y 会将：

> “位置 $q(t)$” 和 “速度 $\dot{q}(t)$” 一起打包进几何结构中，

而 $d\phi$ 是构造 Jet 延拓 $j^1\phi$ 的起点。

小结

项目	内容
定义	$d\Phi : TX \to TY$
坐标表示	$\mathrm{d}\Phi(v) = v^i \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^a}$
几何意义	描述轨迹的“速度向量”如何嵌入丛中
在力学中	是运动速度的编码；拉格朗日函数的输入之一
后续用途	构造 Jet 延拓、泛函导数、欧拉-拉格朗日方程等