B03. 仿射丛

一、仿射空间

仿射空间：定义

仿射空间是“没有原点”的向量空间，形式上可以看作是一个**被向量空间平移的集合**。

严格定义

设 V 是一个向量空间。一个仿射空间 A 是一个集合，并配有一个自由的、可传递的 V-作用（加法）：

$$+ : A \times V \to A, \quad (a, v) \mapsto a + v$$

满足：

- 对任意 $a \in A$，映射 $v \mapsto a + v$ 是 $V \to A$ 的双射；
- 对任意 $a_1, a_2 \in A$，存在唯一的 $v \in V$，使得 $a_2 = a_1 + v$。
  我们称 A 是一个以 V 为模型空间（model space）的仿射空间，记作：

$$A \sim_{\text{aff}} V$$

直观理解

想象你站在一个空旷的草地上：

- 你看不到“绝对原点”；
- 你只知道从**一个位置走向另一个位置**的方向和距离；
- 比如你从 P 走到 Q，你能说“我向东走了 5 米”，这个“5 米向东”就是一个**向量**；
- 但是你无法说 P 是“原点，也无法把它当成 0。
  这样的空间——**只有“相对位移”和“方向”，没有固定原点**，就是一个仿射空间。

仿射空间 vs 向量空间

类别	向量空间	仿射空间
原点	有固定原点（0）	A 没有原点
组成元素	向量（可以相加）	点（之间可以相减得向量）
运算	向量 + 向量 = 向量	**点** + 向量 = **点**；**点** − **点** = 向量

类别	向量空间	仿射空间
举例	力、速度、位移	空间位置、物体位置状态

仿射空间未必是拓扑空间

仿射空间：示例

- 欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 通常既可以看作向量空间，也可以看作仿射空间；
- 一条直线 ℓ 中的点形成仿射空间，其方向向量空间为 $\mathbb{R}$。
- 在物理中：
  - 空间的位置点是仿射空间；
  - 力、速度是向量；
  - 你可以说“从 P 向 v 移动”，这是一种“仿射运算”

二、仿射同构

I. 仿射映射

仿射映射：定义

设 A 和 A' 是以向量空间 V 和 V' 为模型空间的仿射空间
一个映射

$$f : A \to A'$$

称为一个**仿射映射**，如果**存在**一个线性映射（即向量空间同态（即保向量结构的映射，不要求双射）） $\ell : V \to V'$ 和一个点 $a_0' \in A'$，使得对所有 $a \in A$ 有：

$$f(a) = a_0' + \ell(a - a_0)$$

其中 a_0 是 A 中某个固定基准点，$a - a_0 \in V$ 表示两点之差所得到的向量。

一个 **仿射映射** 可以这么理解：

- **线性部分：** 映射 f 的线性部分是 ℓ, 它描述了点之间如何通过线性变换来映射。
- **平移部分：** a_0' 是 A' 中的一个固定点，表示所有映射都相对于此点进行平移。
- **仿射空间：** 在这种映射中，A **和** A' **都是仿射空间**，而不是简单的向量空间。它们没有固定的“原点”，但是有线性结构，因此可以通过仿射映射来描述它们之间的关系。

仿射映射：直观理解

设 A 是一个仿射空间，V 是它的模型向量空间。
一个**仿射映射** $f: A \to A'$ 是一个将 **点** 映射到 **点** 的规则，满足：

> “两个点之间的位移（即向量）在映射后仍然是线性变换下的位移。”

换句话说：

- 点 $P, Q \in A$，它们的“差”是向量 $\vec{PQ} \in V$；
- 仿射映射 f 使得：

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \ell(\vec{PQ}) \in V'$$

  其中 $\ell: V \to V'$ 是**某个**线性映射。

图像是这样的：

- 你在 A 中选择一个参考点 P_0；
- 任意点 P 都可以写作 $P = P_0 + v$，其中 $v \in V$；
- 映射 f 作用为：

$$f(P_0 + v) = f(P_0) + \ell(v)$$

  即先固定一个“参考点”，然后通过线性映射处理“偏移向量”。

仿射映射是这样一种映射，它将仿射空间 A 中的点 $a_0 + v$ 映到 A' 上的点 $f(a_0 + v)$，并满足存在一个（模型）向量空间间的映射 $\ell: V \to V'$ 使满足 $f(a_0 + v) = f(a_0) + \ell(v)$，对于任意 a_0, v 均成立

II. 仿射同构

仿射同构：定义

若 f 是**双射（双射映射）**，并且诱导的线性部分 ℓ 是同构（即线性同构），则称 f 是一个**仿射同构**。
我们记：

$$f: A \xrightarrow{\sim_{\text{aff}}} A'$$

表示 A 和 A' 仿射等价。

仿射同构：直观理解

一个**仿射映射** $f: A \to A'$ 是**仿射同构**，当且仅当：

1. f 是双射（即每个点都能唯一对应）；
2. 它**诱导的线性映射** $\ell : V \to V'$ 是线性同构（可逆线性映射，即向量空间同构）

这就意味着：

- 你可以完全恢复 f 的反函数；
- 仿射结构（点 + 向量关系）在 f 下被完美保留；
- 所以 A 与 A' 是“仿射等价的”。
  仿射同构就像把一个几何空间做了“平移 + 旋转 + 拉伸”，但不需要保留原点或单位长度

仿射同构就像把一个几何空间做了“平移 + 旋转 + 拉伸”，但不需要保留原点或单位长度

一个仿射空间总是仿射同构于它的模型空间

可以认为
一个仿射空间 A 是通过某个向量空间 V 和一个点 $a_0 \in A$ 的平移构建的。具体来说，A 是通过将向量空间 V 中的向量加到点 a_0 上形成的：

$$A = \{a_0 + v \mid v \in V\}$$

这里，a_0 是任意固定点，V 是向量空间，A 是仿射空间

由于仿射空间 A 和它的模型空间 V 之间的关系是通过平移实现的，仿射空间的每个点都可以唯一地表示为一个向量加上一个固定点 a_0。对应的仿射同构的形式是：

$$f : A \to V, \quad f(a_0 + v) = v$$

III. 通过证明 $A \sim^{\text{affine}} V$ 证明 A 是仿射空间

（1）证明一个空间是仿射空间，即证明它仿射同构于一个向量空间（称该向量空间为仿射空间的模型空间）

（2）等价于证明存在仿射同构 $f : A \xrightarrow{\sim} V$

（3）即证明可以构造这样的 f 使满足“线性性”和“双射性”，设 $f(a) = a - a_0 \in V$

（4）线性性=加法性+齐次性

- 加法性：$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$；
- 齐次性：$f(\lambda a) = \lambda f(a)$。

（5）双射性=单射性+满射性

三、仿射丛

仿射丛可以看作“纤维是仿射空间”的丛结构

仿射丛：定义

设 $p: E \to B$ 是一个光滑映射。如果满足以下条件：

1. 对每个 $b \in B$，纤维 $E_b := p^{-1}(b)$ 是一个仿射空间；
2. 存在一个以向量空间为纤维的向量丛（注意总空间是光滑流形，不是向量空间，尽管我们记总空间为 V ） $V \to B$，称为仿射丛的**模型丛**；
3. 对每个点 $b \in B$，存在其开邻域 $U \subset B$，以及一个光滑映射：

   $$\phi : p^{-1}(U) \to V|_U$$

   满足对每个 $b \in U$，纤维上的限制映射：

   $$\phi_b : E_b \xrightarrow{\sim_{\text{aff}}} V_b$$

   是一个仿射空间之间的**仿射同构**（可以将向量空间 V_b 视为一个以自身为模型空间的仿射空间），且与仿射丛投影兼容

（1）每个点上的纤维 E_b 是仿射空间

（2）存在一个一向量空间为纤维的向量丛，称为仿射空间的模型丛

（3）局部平凡化条件：每条纤维仿射同构于向量空间 V_b

放射丛 vs 向量丛

项目	向量丛（Vector Bundl…	仿射丛（Affine Bundle）
丛结构	$p: E \to B$	$p: E \to B$
每根纤维 E_b	向量空间	仿射空间
模型空间	自身纤维 E_b	向量丛 $V \to B$，每个 V_b 是 E_b 的模型空间
纤维空间上是否有自然原点	✅ 有（零向量）	❌ 无（不定义 0）
纤维上的点是否可加	✅ 点 + 点、向量 + 向量	❌ 点不能相加，只能点 + 向量

项目	向量丛（Vector Bundl…	仿射丛（Affine Bundle）
局部平凡化	$E\|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$，保持线性结构	$E\|_U \xrightarrow{\sim_{\text{aff}}} V\|_U$，保持仿射结构
局部同构类型	局部与 $\mathbb{R}^n$ 同构	局部与模型向量丛仿射同构
转换函数	$GL(n, \mathbb{R})$ 或结构群的线性表示	仿射群 $GA(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$
常见例子	切丛 TM、余切丛 T^*M	Jet 丛 $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$，线性连接的仿射空间部分
操作形式	$v_1 + v_2$, λv 等线性代数运算	$a + v$（点 + 向量），$a_2 - a_1 = v$（两点差）