B04. Jet 丛

> C01 是本节的前置知识，尽管在编排上靠后，仍应先阅读 C01

目的：把“截面在一点的值 + 它的一阶导数信息”打包成一个全局几何对象。
在拉格朗日力学中，拉格朗日密度 L 就定义在 J^1Y 上。

我们将按以下结构讲解：

1. 动机：为什么需要 Jet 丛
2. 概念准备：截面在点的“一阶等价”
3. 严格定义：一阶 jet，一阶jet空间，和一阶 Jet 丛 J^1Y
4. 投影与丛结构（$J^1Y \to Y$，$J^1Y \to X$）
5. 局部坐标表达 (x^μ, y^a, y^a_μ)
6. 作为仿射丛：$J^1Y \cong$ affine bundle modeled on $\mathrm{Hom}(T_xX, V_yY)$
7. Jet 延拓 $j^1\phi$（如何把轨迹提升进 J^1Y）
8. 物理示例：一维时间底 → 速度坐标
9. 小结表

一、Jet 丛：构建动机

我们已经有：

- 构型丛 $\pi : Y \to X$
- 截面 $\Phi : X \to Y$
- 微分 $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$

出发点：**不同的截面若在某点取值相同、导数也相同，它们在“拉格朗日密度的局部计算”上应是不可区分的**。我们希望将这些不可区分的截面归于一个等价类，再研究所有等价类构成的整体，并建立相关几何结构。

Step 1：给定一个点 $x \in X$，定义局部截面构成的集合 $\mathcal{S}_x$

在该点 x 附近，考虑在某邻域 $U \ni x$ 上定义的光滑局部截面：

$$\Phi : U \to E, \quad \text{使得 } \pi \circ \Phi = \mathrm{id}_U$$

所有满足该条件的这些**局部截面**（$\Phi, \Psi, \ldots$）构成集合 $\mathcal{S}_x$（显然，$\mathcal{S}$ for sections）。

Step 2：在集合 $\mathcal{S}_x$ 上定义（一阶）等价关系 $\sim_x^1$

我们说两个局部截面 $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}_x$ 是**一阶等价的**，记作：

$$\Phi \sim_x^1 \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(x) = \Psi(x) \text{ 且 } \mathrm{d}\Phi|_x = \mathrm{d}\Psi|_x$$

这个等价关系由两个信息决定：

- 截面在该点的取值：$\Phi(x) \in E_x$
- 截面在该点的导数：$\mathrm{d}\Phi|_x : T_xB \to T_{\Phi(x)}E$，并满足丛结构的兼容性条件（即 $\pi \circ \Phi = \mathrm{id}_U$ 蕴含 $\mathrm{d}\pi \circ \mathrm{d}\Phi = \mathrm{id}_{T_xB}$）

导数 = 切映射

Step 3：由等价关系定义等价类 $j_x^1\Phi$ (代表元是 Φ)，一个该等价类称为一个“一阶 jet”

因此我们常将 Jet 等价类**表示为三元组**：

$$\boxed{j_x^1\Phi = \left(x,\ y^a = \Phi^a(x),\ y_i^a = \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i}(x)\right)}$$

分别代表：

- x label 了定义该等价类的集合 $\mathcal{S}_x$，即改等价类包含的元素是点 $x \in X$ 上的局部截面，定义该等价类的数据是截面在该点 x 上的数据
- y^a 代表等价类内所有截面（等价于代表截面）在该点的取值 $\Phi(x)$ 的局部坐标表示 $\Phi^a(x)$
- y_i^a 代表等价类内所有截面（等价于代表截面）在该点的导数 $\mathrm{d}\Phi(x)$ 的局部坐标表示 $(\mathrm{d}\Phi)_i^a$（也就是该截面作为流形间映射 $\Phi : X \to Y$ 的 **切映射** $\mathrm{d}\Phi : TX \to TY$ 在该点的取值；**若**将 Φ 的坐局部坐标表示 Φ^a 视为坐标变换，**则** y_i^a 就是坐标变换的雅各比矩阵在该点的取值）

Step 4：该等价关系定义的商空间 $J_x^1 := \mathcal{S}_x / \sim_x^i$，称为该点的“一阶 jet 空间”

Step 5：商空间 J_x^1 的不交并 J^1 ，称为“一阶 Jet 丛”，其上的纤维即 J_x^1

二、一阶 jet

I. 一阶 jet $j_x^1(s)$： 是以截面 s 为代表元的，由等价关系 $\sim_x^1$ 定义的等价类

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛，$x \in X$ 是一个固定点。
考虑所有在某个开邻域 $U \subset X$ 上定义的截面 $s : U \to Y$，我们希望定义它们在点 x 的"一阶 jet"

我们定义如下等价关系：
设 $s_1, s_2 : U \to Y$ 是两个截面，若满足：

1. $s_1(x) = s_2(x)$；
2. 对于任意局部坐标系统 (x^i, y^a)，有

$$\left.\frac{\partial(y^a \circ s_1)}{\partial x^i}\right|_x = \left.\frac{\partial(y^a \circ s_2)}{\partial x^i}\right|_x$$

则称 s_1 与 s_2 在 x 处**一阶等价**，记作 $s_1 \sim_x^1 s_2$

定义：

> 截面 s 在 x 处的一阶 jet，记作 $j_x^1 s$，是 s 在 x 处的一阶等价类：
>
> $$j_x^1 s := [s]_x^1 := \{\tilde{s} \mid \tilde{s} \sim_x^1 s\}$$

II. 一阶等价关系 $\sim_x^1$： 坐标无关定义

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛，$x \in X$。
我们考虑所有在某邻域 $U \ni x$ 上定义的截面 $s : U \to Y$，也就是满足 $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ 的光滑映射 s。

由于 s 是一个从 X 到 Y 的光滑映射，我们可以考虑其在 x 点的切映射：

$$\mathrm{d}s|_x : T_x X \to T_{s(x)} Y$$

并要求该映射满足切映射的定义性质：

$$\mathrm{d}s|_x(v)[h] = v[h \circ s]$$

在该语境下可以给出 **两个截面在某点一阶等价** 定义的另一种表述如下：
对于两个在 x 附近定义的截面 $s_1, s_2 : U \to Y$，若满足

1. $s_1(x) = s_2(x)$；
2. 它们诱导的切映射在该点相等，即：

$$ds_1|_x = ds_2|_x : T_x X \to T_{s(x)} Y$$

则称 s_1 与 s_2 在 x 点**一阶等价**，记作：

$$s_1 \sim_x^1 s_2$$

此定义自然导出一阶 jet：

$$j_x^1 s := \text{等价类 } [s]_x^1 = \{\tilde{s} \mid \tilde{s} \sim_x^1 s\}$$

三、一阶 Jet 空间 $J_x^1 Y$

$x \in X$ 处的一阶 jet 空间 $J_x^1 Y$

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛。
我们定义在每个点 $x \in X$ 上的一阶 jet 空间为：

$$J_x^1 Y := \left\{ j_x^1 s \mid s \text{ 是在 } x \text{ 的邻域内定义的局部截面} \right\}$$

可以认为该空间是

$J_x^1 Y$ 是局部截面在点 x 的一阶等价关系 $\sim_x^1$ 下的商空间 $J_x^1 J = \mathcal{S}_x / \sim_x^1$

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛，$x \in X$。
记：

- $\Gamma_x := \{s \in \Gamma(U, Y) \mid x \in U\}$ 为所有在 x 点邻域中定义的局部截面；
- 在 Γ_x 上定义一阶等价关系 $\sim_x^1$，即：

$$s_1 \sim_x^1 s_2 \iff (s_1(x) = s_2(x) \text{ 且 } ds_1|_x = ds_2|_x)$$

则我们定义一阶 jet 空间为商集：

$$J_x^1 Y := \Gamma_x / \sim_x^1$$

即，$J_x^1 Y$ 是所有局部截面在 x 点的**一阶等价类空间**。

一阶 Jet 丛就是一阶 Jet 空间 $J_x^1 Y$ 的不交并

进一步地，整条一阶 Jet 丛是商空间族的并：

$$J^1 Y := \bigsqcup_{x \in X} \Gamma_x / \sim_x^1$$

四、 一阶 Jet 丛 J^1Y

I. 一阶 Jet 丛 J^1Y： 定义

设 $\pi: Y \to X$ 是一个光滑纤维丛。
我们定义一阶 Jet 丛 J^1Y 为：

$$J^1Y := \bigsqcup_{x \in X} J^1_x Y$$

其中 $J^1_x Y$ 是所有在点 x 处局部截面的等价类（即一阶 jets）组成的集合。

这个集合带有两个自然投影：

1. **到总空间的投影**：

$$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y, \quad j^1_x s \mapsto s(x)$$

   它记录了 jet 的值。
2. **到底空间的投影**：

$$\pi_1 : J^1Y \to X, \quad j^1_x s \mapsto x$$

   它记录了 jet 的基点。

II. J^1Y 上的两个自然投影

设 $\pi: Y \to X$ 是一个光滑纤维丛。我们定义了一阶 Jet 丛为：

$$J^1Y := \bigsqcup_{x \in X} J^1_x Y$$

其中 $J^1_x Y$ 是点 x 处所有局部截面 s 的一阶等价类 $j^1_x s$ 构成的集合（称为 x 上的一阶jet空间）。

这个丛上有两个自然的投影映射：

（1）到总空间的投影 $\pi_{1,0}$（target projection）（是仿射丛投影）

可以构造这样的投影，它将 J^1Y 上的每个点（也就是一个一阶jet $j^1_x(s)$，也就是某点 x 上的一个截面等价类）投影到定义该等价类时用到的“截面在该点的函数值 $s(x) \in Y$”（回顾：定义该等价类用到了截面在该点的函数值和导数值）。下面是该投影的严格定义

定义：

$$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y, \quad j^1_x s \mapsto s(x)$$

- 它保留了一阶 jet 的“**函数值**”；
- 即把 jet 映射回它所来自的截面在 x 处的像；
- $\pi_{1,0}$ 并不是纤维丛投影，但它是一个光滑映射；
- 它覆盖了底空间上的 π，即有：

$$\pi \circ \pi_{1,0} = \pi_1$$

（2）到底空间的投影 π_1（base projection）构成纤维丛投影

定义：

$$\pi_1 : J^1Y \to X, \quad j_x^1 s \mapsto x$$

- 它保留了一阶 jet 的**基点**；
- π_1 是一个光滑的子流形间的投影映射；
- J^1Y 在 π_1 下成为 X 上的一个**光滑纤维丛**；
- 每根纤维为一个一阶 Jet 空间 J_x^1Y：

$$J_x^1Y := \pi_1^{-1}(x)$$

该投影使空间 J^1Y 真正构成一个 **纤维丛**， 称为 **一阶Jet丛**，该丛的底空间就是原丛的底空间 X ，且 **每条纤维** 就是一个 **一阶 Jet 空间** $J_x^1Y := \{j_x^1(s)\}$

III. J^1Y “丛上的”局部坐标

为了使 J^1Y 成为光滑流形，并成为 X （或 Y ） 上的一个光滑丛，我们定义其局部坐标如下：

设 (x^i) 是 X 上的局部坐标，(x^i, y^a) 是 Y 上从属局部坐标系统。则一阶 Jet 元素 $j_x^1 s$ 可由如下数据表示：

$$\left(x^i, y^a, y_i^a\right) \quad 其中\ y_i^a := \left.\frac{\partial y^a \circ s}{\partial x^i}\right|_x$$

其中：

- x^i 表示 $j_x^1(s)$ 所处的底空间点 x 的局部坐标
- y^a 表示 $j_x^1(s)$ 的代表元 s 在该点的取值 $s(x) \in Y$ 的局部坐标
- y_i^a 表示 $j_x^1(s)$ 的代表元 s 在该点的切映射 $\mathrm{d}s$ 的局部坐标表示，即雅可比矩阵 $\frac{\partial s^a}{\partial x^i}$ 在该点 x 的取值

于是：

> J^1Y 作为光滑流形的局部坐标为 (x^i, y^a, y^a_i)，并构成从 J^1Y 到 X 的一个光滑纤维丛：
>
> $$\pi_1 : J^1Y \to X$$

IV. J^1Y 上的点

将上述局部坐标表述抽象化：
一阶 Jet 丛上的一个点**可以**表述为 $(x, s(x), \mathrm{d}s(x))$，这种表述具有很好的几何和物理直观
即，一阶 Jet 丛 J^1Y 上的一个点是一个一阶 jet $j^1_x(s)$ ，它包含以下三层信息：

- x：底空间 X 中的点；
- $s(x)$：截面 s 在点 $x \in X$ 处的值，表示 s 对应的“位置数据”
- $\mathrm{d}s(x)$：截面 s 在点 $x \in X$ 处的导数信息，表示截面在该点的切向量

五、 J^1Y 的丛结构

- $\pi_1 : J^1Y \to X$ 是一个纤维丛，其纤维 $(\pi_1)^{-1}(x)$ 是所有可能的一阶 jet 数据。

$$\pi_a : (x, s(x), \mathrm{d}s(x)) \mapsto x \in X$$

- $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$ 是一个 **仿射丛（affine bundle）**：

$$\pi_{1,0} : (x, s(x), \mathrm{d}s(x)) \mapsto s(x)$$

  在给定 $y = \Phi(x)$ 后，不同的一阶导数形成一个以 $\mathrm{Hom}(T_xX, V_yY)$ 为模型空间的仿射空间

如果你的目标是构造动力系统或描述截面空间结构（比如在 PDE 理论中），π_1 很重要；
但 **在拉格朗日力学、变分结构和场论中，$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$ 是核心丛结构**，因为它支持“固定值点 y 、变化导数”的分析方式，因此我们在下一届详细讲解丛 $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$

六、$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$ 是仿射丛

I. 每个点上的纤维都是仿射空间

（1）放射丛投影 $\pi : J^1Y \to Y, \quad j^1_x(s) \to s(x)$

（2）确定纤维结构

对于任意 $y_0 \in Y$，其在 J^1Y 中的纤维为：

$$E_{y_0} := \left\{ j^1_x(s) \mid s(\pi(y_0)) = y_0 \right\}$$

即所有满足 $s(x) = y_0$ 且 $x = \pi(y_0)$ 的一阶 Jet 组成的集合。我们可以将其理解为：

$$E_{y_0} = \{j^1_x(s) = (x, y_0, \mathrm{d}s|_x)\}$$

其中 $x = \pi(y_0)$，而 s 是在 x 的邻域内光滑定义的局部截面。该集合中：

- 所有 Jet 元素的取值点 x 与其值 y_0 已被固定；
- 唯一自由的部分是导数 $\mathrm{d}s|_x$，即 Jet 的导数信息。

（2‘）换言之，对于一条纤维上的元素（一阶 jet 们），元素的自由度体现在 jet 的代表截面 s 在该点 $\pi(y_0)$ 的切映射的值 $\mathrm{d}s|_{\pi(y_0)}$

（3）证明纤维 $E_{y_0} = \{j^1_x(s) = (\pi(y_0), y_0, \text{whatever})\}$ 是仿射空间，即证明它放射同构于一个模型空间（向量空间）

定义模型空间
我们选择以下向量空间作为模型空间：

$$V := \mathrm{Hom}(T_xX, V_{y_0}Y)$$

其中：

- $x = \pi(y_0)$；
- $V_{y_0}Y$ 是纤维丛投影 $\pi : Y \to X$ 在 y_0 处的垂直子空间（即 $\ker(\mathrm{d}\pi_{y_0})$）；
- T_xX 是底空间 X 上点 x 的切空间。

（4）证明纤维是仿射空间，即证明存在仿射同构 f 使纤维仿射同构于一个向量空间

定义一个映射：

$$\boxed{f : E_{y_0} \to V, \quad j^1_x(s) \mapsto \mathrm{d}s|^{\text{vert}}_x}$$

即将 Jet 元素映射到其代表截面 s 的切映射 $\mathrm{d}s|_x$ 在垂直子空间中的投影部分。注意此处：

- $\mathrm{d}s|_x : T_xX \to T_{y_0}Y$ 是一个线性映射；
- 但由于 $s(x) = y_0$ 被固定，$\mathrm{d}s|_x$ 在投影方向 $\mathrm{d}\pi$ 上的变化被约束；
- 因此我们只考虑其在 $\ker(\mathrm{d}\pi_{y_0}) = V_{y_0}Y$ 上的分量，记作 $\mathrm{d}s|^{\text{vert}}_x$。

该映射 f 是仿射映射，其模型线性映射是：

$$j^1_x(s_2) - j^1_x(s_1) \mapsto \mathrm{d}s_2|^{\text{vert}}_x - \mathrm{d}s_1|^{\text{vert}}_x \in V_{y_0}Y$$

（4'）选择映射 $f : E_{y_0} \to V, \quad j^1_x(s) \mapsto \mathrm{d}s|^{\text{vert}}_x$ 作为仿射同构的原因

一方面当然是因为我们对模型空间的选择

$$V := \mathrm{Hom}(T_xX, V_{y_0}Y)$$

但话说回来我们选择该空间作为模型空间的动机呢？在此我们作简要解释

设 $s : X \to Y$ 是一个截面，满足：

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_X$$

对该等式取切映射，有：

$$\mathrm{d}(\pi \circ s)_x = \mathrm{d}\pi_{s(x)} \circ \mathrm{d}s_x = \mathrm{id}_{T_xX}$$

即：

$$\boxed{\mathrm{d}\pi_{s(x)} \circ \mathrm{d}s_x = \mathrm{id}}$$

这说明：

- $\mathrm{d}s_x$ 是 $\mathrm{d}\pi$ 的**一个右逆**（right inverse）；
- 因此，$\mathrm{d}s_x$ 的像不能随意落在 $T_{y_0}Y$ 的任意方向，而是必须与 $\mathrm{d}\pi$ 组合成恒等映射；
- 也就是说，$\mathrm{d}s_x$ 的像必须分解为：

$$\mathrm{d}s_x = \underbrace{\mathrm{d}s_x^{\parallel}}_{\text{被 }\mathrm{d}\pi\text{控制}} + \underbrace{\mathrm{d}s_x^{\perp}}_{\text{自由部分}}$$

  其中：
  - $\mathrm{d}s_x^{\parallel}$ 是 $\mathrm{d}\pi$ 的某种截面（右逆），是由截面结构决定的，不是自由参数；
  - $\mathrm{d}s_x^{\perp}$ 是落在 $\ker(\mathrm{d}\pi_{y_0}) = V_{y_0}Y$ 中的分量，是 Jet 中可独立变化的部分。

（4‘’）如果该构造的动机仍不够清晰，回顾截面的切映射的坐标表示（考虑截面切映射作用于坐标基向量）

引用 **切映射 $\mathrm{d}\Phi|_x$ 作用于 X 的局部坐标基向量 $\{\partial_i\}$ 的效果** 的结论，即：

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i) = \partial_i[\Phi^a]\partial_a}$$

在该式中，若 $\Phi : X \to Y$ 是一个截面，则等式右边

$$\frac{\partial\Phi^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \partial_i + \frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \partial_\mu$$

它的含义是：

- **第一项** ∂_i：表示在 Y 中沿着 x^i 的方向前进；
- **第二项** $\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \partial_\mu$：表示前进时会附带地沿着纤维方向“上浮”或“下沉”。

我们发现 **只有第二部分包含关于 Φ 的信息**，换言之，$d\Phi$ 中沿 $\partial/\partial x^i$ 部分的内容不带有截面的信息，只有沿 $\partial/\partial y^\mu$ 部分包含关于截面的信息

（5）证明该映射是仿射同构

我们需验证以下三点：

- f 是良定义的，即对每个 Jet 元素，其对应的 $\mathrm{d}s|_x^{\text{vert}}$ 存在并唯一；
- f 是满射：任意一个 $\varphi \in \mathrm{Hom}(T_xX, V_{y_0}Y)$ 都可以构造一个截面 s，使得 $s(x) = y_0$ 且 $\mathrm{d}s|_x^{\text{vert}} = \varphi$；
- f 是仿射结构保形的，即 E_{y_0} 上两个 Jet 元素的差 $j_x^1(s_2) - j_x^1(s_1)$ 被 f 映射为导数之差。
  由此，E_{y_0} 与 $\mathrm{Hom}(T_xX, V_{y_0}Y)$ 仿射同构，构成仿射空间。

II. J^1Y 的模型丛

七、Jet 延拓 $j^1\Phi : X \to J^1Y$

给定截面 $\phi : X \to Y$，我们可以将它提升到一阶 Jet 丛：

> **定义（Jet 延拓）**
>
> $$j^1\phi : X \to J^1Y, \qquad x \mapsto j_x^1\phi.$$
>
> 在坐标中：
>
> $$j^1\phi(x) = \big(x^\mu,\, y^a(x),\, \partial_\mu y^a(x)\big).$$

这就是把“轨迹 + 一阶导数”打包成一个新的丛截面。

八、物理示例

我们继续使用粒子在平面中运动的例子。

- 时间底空间：$X = \mathbb{R}$，坐标 t；
- 构型空间：$Q = \mathbb{R}^2$，坐标 (x, y)；
- 构型丛：$Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$，坐标 (t, x, y)；
- 截面：$\phi(t) = (t, x(t), y(t))$。

则：

- 一阶 Jet 从坐标：(t, x, y, x_t, y_t)（这里 $x_t = \frac{dx}{dt}$ 等）；
- Jet 延拓：

$$j^1\phi(t) = \big(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\big).$$

拉格朗日函数就定义在这一空间上：

$$L : J^1Y \to \mathbb{R}, \qquad L(t, x, y, x_t, y_t) = \tfrac{1}{2}m(x_t^2 + y_t^2) - V(x, y).$$

总结

项目	内容
一阶 jet	截面在点处值与一阶导数的等价类
J^1Y	所有 1-jet 的集合，带自然流形结构
投影	$\pi_1 : J^1Y \to X$，$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$
仿射结构	$J^1Y \to Y$ 是仿射丛，模型空间 $\mathrm{Hom}(T_xX, V_yY)$
局部坐标	(x^μ, y^a, y^a_μ)
Jet 延拓	$j^1\phi(x) = (x^\mu, y^a(x), \partial_\mu y^a(x))$
力学应用	L 定义在 J^1Y 上；轨迹提升用于变分