B05. Jet 延拓

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛，$\Phi : X \to Y$ 是一个 **局部截面**，即满足：

$$\pi \circ \Phi = \mathrm{id}_X$$

我们可以定义该截面的一阶 Jet 延拓（Jet prolongation）：

$$\boxed{j^1\Phi : X \to J^1Y}$$

它将 X 中的每个点 $x \in X$ 映射到该截面在 x 点处的一阶 jet：

$$x \mapsto j^1_x\Phi$$

一、一阶 jet 延拓 $j^1\Phi$：定义

Jet 延拓 $j^1\Phi$ 是将截面 Φ 本身提升到 Jet 丛 J^1Y 中的映射，定义为：

$$\boxed{j^1\Phi(x) := j^1_x\Phi}$$

也就是说，$j^1\Phi$ 是一个从 X 到 J^1Y 的映射，满足：

- 对每个 $x \in X$，$j^1\Phi(x)$ 是 Φ 在 x 的一阶 jet；
- $j^1\Phi$ 自然地满足投影条件：

  $$\pi_1 \circ j^1\Phi = \mathrm{id}_X, \quad \pi_{1,0} \circ j^1\Phi = \Phi$$

  即：

  - $j^1\Phi$ 是 $J^1Y \to X$ 的一个截面；
  - 它“延拓”了原始截面 Φ，并编码了其一阶导数信息。

二、$j^1\Phi$：局部坐标表示

设：

- 底空间 X 上的局部坐标为 (x^i)；
- 总空间 Y 上的从属局部坐标为 (x^i, y^μ)，其中：
  - x^i 描述底空间方向；
  - y^μ 描述纤维方向（即每条 $\pi^{-1}(x)$ 上的局部坐标）；

- 截面 $\Phi : X \to Y$ 的局部表达为：

$$\Phi(x) = (x^i, \Phi^\mu(x))$$

  即，$\Phi^\mu(x)$ 是截面 Φ 在纤维方向的坐标表示。

则其一阶 Jet 延拓 $j^1\Phi : X \to J^1Y$ 的局部表达为：

$$\boxed{j^1\Phi(x) = \left(x^i, \Phi^\mu(x), \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i}(x)\right)}$$

即：$j^1\Phi$ 把每个点 $x \in X$ 映射到三组数据：

- 原始坐标 x^i；
- 值 $\Phi^\mu(x)$（即 $\Phi(x)$ 在纤维方向上的取值）；
- 导数 $\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i}(x)$（即 $\mathrm{d}\Phi_x$ 在纤维方向上的雅可比分量）。
  这个三元组也可以写成

$$(x^i, \Phi^a(x), \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i})(x)$$

  因为该形式并不比上面的形式提供更多关于 Φ 的信息

三、几何解释

Jet 延拓 $j^1\Phi$ 将原本“只有位置”的映射 Φ 拓展为“位置 + 一阶速度”的信息：

- 原映射 Φ：$x \mapsto \Phi(x)$ 是点 $y \in Y$；
- 延拓映射 $j^1\Phi$：$x \mapsto j^1_x\Phi$ 是包含 $\Phi(x)$ 及其切映射 $\mathrm{d}\Phi_x$ 的 jet 数据。
  因此，Jet 延拓是将截面映射提升至 Jet 丛中的**“导数图像”**。

性质小结

- $j^1\Phi : X \to J^1Y$ 是 $J^1Y \to X$ 的一个光滑截面；
- 它将 Φ 的所有导数信息封装为点 $j^1_x(\Phi)$；
- 若 J^1Y 被视为仿射丛，则 $j^1\Phi$ 给出了该仿射丛上的**规范截面**；
- Jet 延拓是后续变分法（如拉格朗日函数作用在 Jet 延拓上）等几何物理结构的基础操作。