C01. 垂直丛

一、引入背景

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛，我们将 Y 看作带有纤维结构的“空间上空间”。
我们希望研究如下问题：

- 在 Y 中哪些方向的运动“只在纤维内滑动”而不涉及底空间 X?
- 如何区分切丛 TY 中“水平”（沿 X）和“垂直”（沿纤维）方向?
- Jet 丛 J^1Y 中的导数结构，如何与这种方向性结构挂钩?

这就需要引入 **垂直丛**（vertical bundle）的概念。

二、垂直丛

垂直丛：定义

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑映射，其诱导切映射 $\mathrm{d}\pi : TY \to TX$
我们定义 **垂直丛**（vertical bundle）为：

$$VY := \ker(\mathrm{d}\pi) \subset TY$$

也就是说，对每个点 $y \in Y$，有：

$$V_yY := \ker(d\pi_y) \subset T_yY$$

于是我们得到 $VY = \bigcup_{y \in Y} V_yY$，它是切丛 TY 的一个子丛，称为 Y 沿 π 的垂直丛。

I. 从投影 π 的切映射 $\mathrm{d}\pi$

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛。我们希望理解：

> 从投影在切丛之间诱导出怎样的结构？如何刻画“切向量是否在纤维内”?

从投影的切映射 $\mathrm{d}\pi$ ：定义

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑映射（特别地，是纤维丛投影），则它诱导出切映射：

$$d\pi : TY \to TX$$

该映射满足：

- 对于每个 $y \in Y$，切映射在点 y 处诱导线性映射：$\mathrm{d}\pi_y : T_yY \to T_{\pi(y)}X$
- 它是底空间上 π 的微分形式，**刻画 Y 中的运动趋势在 X 中的投影**。
  - 所谓“Y中的运动趋势”指的就是 TY 上的切向量
  - $\mathrm{d}\pi$ 刻画的就是 TY 中的切向量如何 “兼容地” 映射到 TX 上
    - 这种所谓的“兼容”首先保证纤维 TyY 上的切向量被映射到（关于丛投影 π ）对应的的纤维 $T_{\pi(y)}X$ 上
    - 上面提到的 “$\mathrm{d}\pi$ 是线性映射” 最终也体现为它和 π 兼容：

$$\mathrm{d}\pi_y(v)[h] = v[h \circ \pi]$$

      其中 $v \in T_yY, \quad h \in C^\infty(X)$

（1）从投影的切映射：直观理解

给定切向量 $v \in T_yY$，我们可以将其理解为 Y 中一点 y 的某个方向的“运动趋势”。
则：

> $d\pi_y(v) \in T_{\pi(y)}X$ 是该运动在底空间 X 上的“投影方向”。

（2）从投影的切映射：局部坐标表示

首先回顾任意光滑映射 $\Phi : X \to Y$ 的切映射的坐标表示（操作性质）

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi(v) = \left(v^i \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial y^a}}$$

我们只需要将 **从投影的切映射** 情形代入上式

首先我们有必要重新澄清我们的 **符号体系**，特别是关于局部坐标的指标的部分
设局部坐标为：

- x^i 为 X 上坐标；
- $y^a = (x^i, y^\mu)$ 为 Y 上从属坐标
  - 纤维丛上一点的坐标 y^a 由两部分组成，其中 x^i 是纤维丛上的该点投影在底空间上的点的局部坐标，y^μ 是该点在“这条纤维”上的坐标；
- 从投影的坐标表示为 $\pi(x^i, y^a) = (x^i)$
  切丛 TY 上的一点上局部（坐标）基由 Y 上的局部坐标诱导：

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\}$$

  将 $\mathrm{d}\pi$ 代入 **切向量作用于局部坐标基的结论**

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i)=\partial_i[\Phi^a]\partial_a,\quad \text{其中 } \partial_i \text{ 是定义域切空间基，} \partial_a \text{ 是像空间切空间的基}}$$

即将 $\mathrm{d}\Phi$ 取 $\mathrm{d}\pi$，将 ∂_i 替换为 $\frac{\partial}{\partial y^a}$ ，将 ∂_a 替换为 $\frac{\partial}{\partial x^i}$；并且对 $\frac{\partial}{\partial y^a}$ 分类讨论，得到：

$$\mathrm{d}\pi_y\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i},\quad \mathrm{d}\pi_y\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)=0$$

也就是说，从投影 $\pi:Y\to X$ 的切映射 $\mathrm{d}\pi$ 是这样一个映射，它将 TY 上的切向量映到 TX 上的切向量，并且：

- $d\pi$ 只“保留”方向在 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 方向上的分量
- 所有 $\frac{\partial}{\partial y^\mu}$ 方向都会被映射为 0

换言之：
设 $\pi:Y\to X$ 是一个纤维丛，令 $\mathrm{d}\pi:TY\to TX$ 为其切映射。
在坐标图 (x^i,y^μ) 下，TY 的局部坐标为 $(x^i,y^mu;\dot{x}^i,\dot{y}^\mu)$。
此时，对于 $v=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\dot{y}^\mu\frac{\partial}{\partial y^\mu}\in T_{(x,y)}Y$，切映射作用于其的结果是：

$$\mathrm{d}\pi(v)=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_xX$$

II. 从投影的切映射的核 $\ker(\mathrm{d}\pi)$： 正好等于纤维丛上每条纤维的切空间的并空间：$\ker(\mathrm{d}\pi)=\bigcup_{y\in Y}T_y(Y_{\pi(y)})$

（1）切映射 $\mathrm{d}\pi$ 把 Y 上的切向量映射到底空间 X 的切空间中，提取其“底空间方向”分量。

（2）核中的向量是那些在 TY 中被 $\mathrm{d}\pi$ 映射为零的向量。

（3）也就是说，这些向量在“底空间方向”（也就是基向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的方向上）没有任何分量，仅在纤维方向（也就是基向量 $\frac{\partial}{\partial y^\mu}$）上变化。

（4）它们构成了沿着每条纤维方向“滑动”的切向量集合，即：
$\ker(\mathrm{d}\pi)=\bigcup_{y\in Y}T_y(Y_{\pi(y)})$

$$\boxed{\ker(\mathrm{d}\pi)=\bigcup_{y\in Y}T_y(Y_{\pi(y)})}$$

直观理解：$\ker(\mathrm{d}\pi)$ **就等于纤维丛 Y 上每条纤维 $Y_{\pi(y)}$ 的切空间 $T_yY_{\pi(y)}$ 的并定义的集合**

III. $VY = \ker(\mathrm{d}\pi) = \bigcup_{y \in Y} T_y(Y_{\pi(y)})$ 构成切丛 TY 的“子丛”

切丛 TY 通过丛投影 π 拆分为两部分：

$$TY = VY \oplus H$$

其中 H 是某种**水平分布**（未必自然给出），但无论如何：

> 垂直丛 VY 是 TY 的结构性子丛，刻画“保持 $\pi(y)$ 不动”的所有运动方向。

小结

项目	内容
定义	$VY := \ker(d\pi) \subset TY$
类型	$VY \to Y$ 是向量丛
纤维 V_yY	表示在 $Y_{\pi(y)}$ 内的切向量
局部基底	$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}$
与 TY 关系	是其自然子丛，$TY = VY \oplus H$（非唯一分解）
用途	描述虚位移 δy，构造 Jet 仿射丛结构