C02. 拉回丛

在研究变分、Jet 丛或复合结构（如复合截面）时，常常需要将一个丛“拉回”到另一个底空间上，从而在新的底空间上建立相关结构。本节将系统引入拉回丛（pullback bundle）的概念

一、拉回丛：构造动机

设有一个纤维丛：

$$p : E \to B$$

其中 E 是总空间，B 是底空间。现在我们关心的却不是 B 本身，而是另一个流形 X 与 B 之间的映射关系：

$$\Phi : X \to B$$

这常常发生在以下几种情境：

- **情境一：** X 是时间流形或参数空间，我们希望研究某些 E 上的结构（如张量、切向量、Lagrangian）在 X 上的“投影”；
- **情境二：** X 是 B 的子流形或某个“路径空间”，我们希望把 E 中的几何数据转移到 X 上；
- **情境三：** 我们要研究的变分对象（如截面、路径等）定义在 X 上，但其取值属于 E 的某些纤维。
  在这些情形中，我们需要将 E 的结构“搬到”X 上，从而在 X 上讨论导数、拉回张量场、构造泛函等几何对象。

二、拉回丛：定义

定义背景

设：

- (E, B, π) 是一个光滑纤维丛，其中 $\pi : E \to B$ 是丛投影；
- $\Phi : X \to B$ 是一个从流形 X 到丛底空间 B 的光滑映射。

我们希望通过 Φ 的“拉回”构造一个以 X 为底空间的新纤维丛，称为 E 关于 Φ 的**拉回丛**，记作：

$$\Phi^* E \xrightarrow{\pi'} X$$

拉回丛：集合结构

集合层面上，$\Phi^* E$ 被定义为如下的集合：

$$\Phi^*E := \{(x,e) \in X \times E \mid \Phi(x) = \pi(e)\}$$

即它是 $X \times E$ 中 (x,e) 的集合，要求集合中的点满足满足 e 正好“位于” $\Phi(x)$ 所对应的纤维上。

对应的投影映射定义为：

$$\pi'(x,e) := x$$

（1）拉回丛不是平凡丛：Φ^*E 是 $X \times E$ 的子集，但是并不全局同胚于 $X \times E$

（2）拉回丛的每条纤维 $(\Phi^*E)_x$ 同构于原丛的对应纤维 $E_{\Phi(x)}$：
$\pi'^{-1}(x) = \{(x,e) \mid e \in E_{\Phi(x)}\} \cong E_{\Phi(x)}$，即 $(\Phi^*E)_x \cong E_{\Phi(x)}$

拉回丛：纤维结构

对每个 $x \in X$，其上纤维为：

$$(\Phi^*E)_x = \{(x,e) \in \Phi^*E \mid \Phi(x) = p(e)\} \cong E_{\Phi(x)}$$

也就是说，Φ^*E 上每个点的纤维与 E 中对应点 $\Phi(x)$ 的纤维同构（自然标识为同一个集合）。

结论：拉回丛和原丛具有相同的“典型纤维”

拉回丛：光滑结构

定义回顾：$\pi : E \to B$ 是光滑纤维丛，X 是光滑流形，$\Phi : X \to B$ 是两者定义的光滑结构下的光滑映射

拉回丛的光滑结构：构造思路

我们希望赋予 Φ^*E 一个**光滑流形结构**，并使得 $\pi' : \Phi^*E \to X$ 成为光滑丛投影。
思路是：利用原丛 $E \to B$ 的**局部平凡化图**，通过 Φ 传递到 Φ^*E 上，构造出局部平凡化结构。

设：

- (V,ψ) 是 $E \to B$ 的局部平凡化图：

$$\psi : \pi^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V \times F, \quad \pi = \mathrm{pr}_1 \circ \psi$$

- 取开集 $U \subset X$，满足 $\Phi(U) \subset V$；
- 构造映射：

$$\widetilde{\psi} : \pi'^{-1}(U) \to U \times F, \quad (x,e) \mapsto (x,f), \quad \text{其中 } \psi(e) = (\Phi(x), f)$$

验证局部平凡化条件

验证局部平凡化条件

- $\widetilde{\psi}$ 是双射（因为 ψ 是局部双射，且 $\Phi(x)$ 被固定）；
- 其反函数为：

$$(x,f)\mapsto(x,\psi^{-1}(\Phi(x),f))$$

  是光滑的（ψ^{-1} 和 Φ 都是光滑映射）；
- 局部坐标变换来自原丛 E 的过渡函数和 Φ 的复合，因而是光滑的。

因此，Φ^*E 被赋予了一个光滑结构，使得：

- $\pi':\Phi^*E\to X$ 是一个光滑丛投影；
- 每条纤维：

$$\pi'^{-1}(x)=\{x\}\times E_{\Phi(x)}\cong E_{\Phi(x)}$$

- 典型纤维为 F，丛结构由原丛 E 和映射 Φ 诱导而来。

三、切丛的拉回

设 $\Phi:X\to Y$ 是两个光滑流形之间的光滑映射，$TY\to Y$ 是 Y 上的切丛。
我们构造 Φ 对应的切丛的拉回丛 Φ^*TY，它是一个定义在 X 上的光滑丛。

I. Φ^*TY： 定义

我们定义拉回丛的总空间为：

$$\Phi^*TY:=\{(x,v)\in X\times TY\mid\pi_Y(v)=\Phi(x)\}$$

其中：

- $\pi_Y:TY\to Y$ 是切丛的自然投影；
- Φ^*TY 是 $X\times TY$ 的一个子集，称为 TY 在 Φ 下的拉回丛；
- 拉回丛自身带有一个自然投影 $\pi':\Phi^*TY\to X$，定义为：

$$\pi'(x,v):=x$$

II. Φ^*TY：纤维结构

对于任意 $x\in X$，拉回丛 Φ^*TY 在点 x 上的纤维为：

$$(\Phi^*TY)_x=\left\{(x,v)\in\Phi^*TY\mid\pi'(x,v)=x\right\}\cong T_{\Phi(x)}Y$$

因此，Φ^*TY 的每根纤维等同于 TY 中点 $\Phi(x)$ 处的切空间。

III. Φ^*TY：局部坐标表示

若：

- X 上局部坐标为 (x^i)；
- Y 上局部坐标为 (y^a)；
- $\Phi(x) = (\Phi^a(x))$；
- 切丛 TY 上的局部坐标为 (y^a, v^a)；

则拉回丛 Φ^*TY 的坐标为：

$$\left(x^i, v^a\right) \quad \text{其中 } v^a \in T_{\Phi(x)}Y$$

IV. Φ^*TY：直观理解

- TY 的点是 Y 上某点处的切向量；
- Φ^*TY 的点是"**沿着 Φ 拉回的切向量**"，即：

  > 对 X 上的每一点 x，我们附上 $\Phi(x)$ 处的切向量。

这样，我们得到一个以 X 为底空间的向量丛，其纤维结构由 TY 决定。