C03. 变分与拉回垂直丛

在讨论作用量泛函的变分时，我们常说“对一个场 Φ 的变分 $\delta\Phi$ 是某种方向上的无穷小扰动”。现在我们希望以几何方式精确定义这一说法。

一、 垂直丛的拉回丛 Φ^*VY

回顾：垂直丛 VY

设 $\pi: Y \to X$ 是一个光滑映射，其诱导切映射 $\mathrm{d}\pi: TY \to TX$
我们定义 **垂直丛**（vertical bundle）为：

$$VY := \ker(\mathrm{d}\pi) \subset TY$$

也就是说，对每个点 $y \in Y$，有：

$$V_yY := \ker(d\pi_y) \subset T_yY$$

于是我们得到 $VY = \bigcup_{y\in Y} V_yY$，它是切丛 TY 的一个子丛，称为 Y 沿 π 的垂直丛。

（1）丛投影的切映射 $\mathrm{d}\pi$ 满足切映射的定义性质

$\mathrm{d}\pi_y(v)[h] = v[h \circ \pi]\,, \forall v \in T_yY, h \in C^\infty(X)$

（2）$\mathrm{d}\pi_y$ 作用在 T_yY 上的切向量基上的效果

我们知道，对于任意光滑映射 $\Phi: X \to Y$，其诱导的切映射 $\mathrm{d}\Phi$ 作用在 T_xX 上的坐标基 $\partial/\partial x^i$ 的效果为：

$$\mathrm{d}\Phi_x(\frac{\partial}{\partial x^i}) = (\frac{\partial\Phi^a}{\partial x^i})\Big|_x \frac{\partial}{\partial y^a}$$

其中 $\Phi^a(x)$ 是 Φ 在 $x \in X$ 点（附近）的局部坐标表示

代入 $\pi: Y \to X$ 得：

$$\mathrm{d}\pi_y(\frac{\partial}{\partial y^a}) = (\frac{\partial\pi^i}{\partial y^a})\Big|_y \frac{\partial}{\partial x^i}$$

显然，对于 $a = j$ 的情况，也就是对于 $\frac{\partial}{\partial x^j}$，该式返回 $\frac{\partial}{\partial x^j}$；而对于 $a = \mu$ 的情况，也就是对于 $\frac{\partial}{\partial y^\mu}$，该式返回 0.
换言之：

丛投影的切映射是一个将 **总空间的切向量** 映射到 **底空间切向量** 的函数。我们可以这样描述它的行为：

1. 在一个局部坐标系统中，我们可以将总空间上的切向量分解为两类：
   - 那些沿着底空间坐标方向的分量；
   - 那些沿着纤维方向（即在纤维方向变化的）分量。
2. 从投影的切映射作用在这些切向量上时，会：
   - 把所有**沿底空间方向的分量**准确地映射到底空间中对应的方向上；
   - 把所有**仅在纤维方向上变化的分量**映射为零，因为这些分量在底空间中没有对应的“方向”或“意义”。

（3）丛投影的切映射的核 $\ker(\mathrm{d}\pi)$ 作为垂直丛的总空间 VY

由上述 $\mathrm{d}\pi_y$ 作用于 T_yY 上切向量的作用效果，我们可以知道，$\ker(\mathrm{d}\pi)$ 就等于所有沿喜爱屋内方向的切向量的集合，也就是每条纤维的切空间的并 $\bigcup_{y\in Y} T_y(Y_{\pi(y)})$
VY 包含这样的元素：它的任意元素都是 TY 中的切向量，并且该切向量 **沿底空间方向的分量为 0**

回顾：拉回丛

集合层面上，Φ^*E 被定义为如下的集合：

$$\Phi^*E := \{(x,e) \in X \times E \mid \Phi(x) = \pi(e)\}$$

即它是 $X \times E$ 中 (x,e) 的集合，要求集合中的点满足满足 e 正好“位于” $\Phi(x)$ 所对应的纤维上。

对应的投影映射定义为：

$$\pi'(x,e) := x$$

（1）拉回丛不是平凡丛：Φ^*E 是 $X \times E$ 的子集，但是并不全局同胚于 $X \times E$

（2）拉回丛的每条纤维 $(\Phi^*E)_x$ 同构于原丛的对应纤维 $E_{\Phi(x)}$：$\pi'^{-1}(x) = \{(x,e) \mid e \in E_{\Phi(x)}\} \cong E_{\Phi(x)}$，即 $(\Phi^*E)_x \cong E_{\Phi(x)}$

垂直丛的拉回丛 Φ^*VY：定义

设：

- $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛；

- VY 是 Y 上的**垂直丛**，即垂直子空间 $V_yY = \ker(\mathrm{d}\pi_y)$（其中 $y \in Y$）的并；
- $\Phi : X \to Y$ 是一个光滑映射。

我们可以通过 Φ 构造垂直丛的拉回丛，记作：

$$\Phi^*VY := \{(x, v) \in X \times VY \mid \pi_Y(v) = \Phi(x)\}$$

即，Φ^*VY 是所有满足 $v \in V_{\Phi(x)}Y$ 的"点对" (x, v) 的集合，其中 $v \in VY$ 是 Y 中的垂直向量，$\Phi(x) = \pi_Y(v)$ ，拉回丛中的每条纤维同构于原丛中的对应纤维：

$$\boxed{(\Phi^*VY)_x \cong V_{\Phi(x)}Y}$$

丛投影与局部结构

- 投影映射：定义投影映射 $\pi' : \Phi^*VY \to X$ 为：

  $$\pi'(x, v) = x$$

  这个映射将拉回丛的元素 (x, v) 投影到底空间 X 上，显然这是一个光滑映射。
- 局部坐标：

直观理解：直观上，拉回垂直丛 Φ^*VY 是在 X 上构造的纤维丛，其每个纤维 $x \in X$ 对应于 Y 上 $\Phi(x)$ 处的垂直空间（即 $V_{\Phi(x)}Y$），因此每个拉回丛的元素是由底空间点 x 和对应的垂直向量 $v \in V_{\Phi(x)}Y$ 组成。

- **拉回丛的光滑结构：** Φ^*VY 是 X 上的光滑纤维丛，因为它是从光滑丛 VY 和光滑映射 Φ 诱导出来的。
- **纤维同构：** 每个纤维 $\pi'^{-1}(x)$ 与原丛 $V_{\Phi(x)}Y$ 同构。换句话说，拉回丛中的每根纤维就是 Y 中与 $\Phi(x)$ 对应的垂直空间的复制。

二、截面的变分 $\delta\Phi$

截面的变分 $\delta\Phi$ 是垂直拉回丛 Φ^*VY 上的一个光滑截面 $\delta\Phi : X \to \Phi^*VY$

我们考虑垂直丛 $VY \to Y$，其每条纤维为 T_yY 中沿纤维方向（即在 $\ker(\mathrm{d}\pi)$ 中）的子空间。拉回 Φ^*VY 之后，我们得到了一个以 X 为底空间的向量丛。变分 $\delta\Phi$ 就可以被视为其上的一个截面。

符号	类型	含义
Φ	截面	$\Phi \in \Gamma(X, Y)$，即 $\pi \circ \Phi = \mathrm{id}_X$

符号	类型	含义
$\delta\Phi \in \Gamma(X, \Phi^*VY)$	截面	表示对 Φ 的无穷小扰动
VY	向量丛	$VY := \ker(\mathrm{d}\pi) \subset TY$
$\Phi^*VY \to X$	向量丛	将 VY 拉回到 X 上，变分的“取值空间”

换言之：
**变分 $\delta\Phi$ 是 Φ 所诱导的拉回垂直丛 Φ^*VY 的一个光滑截面。*

变分 $\delta\Phi$ 是对截面 Φ 的无穷小扰动。为了在几何上描述这一扰动，我们需要将其视为拉回垂直丛 Φ^*VY 上的一个光滑截面。严格来说，变分 $\delta\Phi$ 定义为：

$$\delta\Phi \in \Gamma(X, \Phi^*VY)$$

其中：

- $\Gamma(X, \Phi^*VY)$ 表示从 X 到拉回垂直丛 Φ^*VY 的**光滑截面空间**；
- 每个点 $x \in X$ 上，变分 $\delta\Phi(x)$ 是 Y 上点 $\Phi(x)$ 处的一个切向量，这个切向量**只能\落在纤维方向的切空间 $V_{\Phi(x)}Y$ 中。

拉回垂直丛 Φ^*VY 由映射 Φ 和原丛 VY 的纤维垂直部分构成，因此变分 $\delta\Phi$ 在每个点 x 上所映射到的切向量必须是 Φ^*VY 中的一个元素，确保扰动仅在总空间 Y 上的纤维方向上进行。

直观解释

- 变分 $\delta\Phi(x)$ 是 $T_{\Phi(x)}Y$ 中的一个向量；
- 由于 $\Phi(x)$ 已经确定为某根纤维上的点，我们要求 $\delta\Phi(x)$ 落在该点纤维上的“切向量方向”，也就是 $V_{\Phi(x)}Y$；
- 这说明 $\delta\Phi(x) \in V_{\Phi(x)}Y$；
- 于是整体上 $\delta\Phi \in \Gamma(X, \Phi^*VY)$。
