D01. 拉格朗日密度

一、前置：一阶 Jet 丛 J^1Y （回顾）

I. 局部截面构成的集合 $\mathcal{S}_x$ ，该集合上的一阶等价关系 $\sim_x^1$，该等价关系定义的等价类 $j_x^1(\Phi)$，该等价关系定义的商空间 $J_x^1Y := \mathcal{S}_x/\sim_x^1$

（1）给定光滑纤维丛 $\pi: Y \to X$ ，一个局部截面是一个与丛投影兼容的光滑映射 $\Phi: U \to Y$ ；记 $\mathcal{S}_x$ 为所有定义在 x 的某一邻域上的光滑局部截面所构成的集合

（2）在该集合上一可以定义一种等价关系（常称为一阶 jet 等价）$\sim_x^1$，两个截面被称为“在 x 附近具有相同的 1 阶接触”，如果他们满足 “$\Phi(x) = \Psi(x)$” 且 “$\mathrm{d}\Phi_x = \mathrm{d}\Psi_x : T_xX \to T_{\Phi(x)}Y$”

需要特别指出的是，定义该等价关系的第二个条件中，在 **判断两个截面的切映射是否相等** 时，我们实际上 **只需要判断两个截面的切映射在任意点作用于切向量基是否相等** 即可：
引用 **切映射 $\mathrm{d}\Phi|_x$ 作用于 X 的局部坐标基向量 $\{\partial_i\}$ 的效果** 的结论，即：

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_x(\partial_i) = \partial_i[\Phi^a]\partial_a}$$

在该式中，若 $\Phi: X \to Y$ 是一个截面，则等式右边

$$\frac{\partial \Phi^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \partial_i + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \partial_\mu$$

它的含义是：

- **第一项** ∂_i：表示在 Y 中沿着 x^i 的方向前进；
- **第二项** $\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^i} \cdot \partial_\mu$：表示前进时会附带地沿着纤维方向“上浮”或“下沉”。
  我们发现对任意两个截面，作用在坐标基上时，第一项始终相等， **整整需要比较的是第二项，也就是截面的一阶导数沿纤维方向的分量**

（3）该等价关系 $\sim_x^1$ 定义的一个等价类称为一个一阶 jet，用等价类中的一个代表截面标记，记作 $j_x^1 s$ 或 $j_x^1(s)$

（4）由一阶等价关系定义的商空间，也就是一阶 jet 构成的集合，记作 $J_x^1Y = \{j_x^1(s)\}$ ，称为“一阶 jet 空间”

II. 一阶 Jet 丛 J^1Y 就是一阶 Jet 空间 J_x^1Y 的不交并

$J^1Y := \bigsqcup_{x \in X} J_x^1Y$

设 $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛。
我们定义一阶 Jet 丛 J^1Y 为：

$$J^1Y := \bigsqcup_{x \in X} J^1_x Y$$

其中 $J^1_x Y$ 是所有在点 x 处局部截面的等价类（即一阶 jets）组成的集合。

这个集合带有两个自然投影：

1. **到总空间的投影**：

$$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y, \quad j^1_x s \mapsto s(x)$$

   它记录了 jet 的值。
2. **到底空间的投影**：

$$\pi_1 : J^1Y \to X, \quad j^1_x s \mapsto x$$

   它记录了 jet 的基点。

III. 一阶 Jet 丛 J^1Y 作为仿射丛的丛结构

仿射丛投影：$\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$, $j^1_x(s) \mapsto s(x) \in Y$

仿射丛纤维：$E_{y_0} := \pi^{-1}_{1,0}(y_0) = \left\{ j^1_{\pi(y_0)}(s) \mid s(\pi_{1,0}(y_0)) = y_0 \right\}$

在任意一根选定的纤维 E_{y_0} 上，用于定义 jet 的基点 $x_0 = \pi(y_0)$ 和截面的值 $s(x) = y_0$ 都是选定的，纤维上的自由度只有用于定义 jet 的截面的一阶导数值 $\mathrm{d}s_{x_0}$

仿射丛纤维构成仿射空间，即任意纤维都同构于一个向量空间（称为仿射空间的模型空间）$V := \mathrm{Hom}(T_{\pi(y_0)}X, V_{y_0}Y)$

选择映射 $f : E_{y_0} \to V, \quad j^1_x(s) \mapsto \mathrm{d}s|^{\mathrm{vert}}_x$ 作为仿射同构

IV. 一阶 Jet 丛 J^1Y 的局部坐标

（1）J^1Y 上的一个点就是一个一阶 jet $j^1_x(s)$

（2）$j^1_x(s)$ 在 J^1Y 上可以表示为局部坐标 (x^i, y^μ, y^μ_i) 其中 $y^\mu = s^\mu(x)$, $y^\mu_i = (\mathrm{d}s_x)^\mu_i$

二、前置：k 形式，外积， 流形上的 k 形式场

I. 对偶空间，1-形式

（1）对偶空间 V^*

设 V 是一个向量空间，则**对偶空间** V^* 是由 V 上的所有线性泛函（即从 V 到实数的线性映射）组成的空间。形式上，

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ 是线性映射}\}.$$

如果 V 是 n 维的，则 V^* 也是 n 维的。

（2）对偶空间的元素是向量空间上的 1-形式：$\omega : V \to \mathbb{R}, \omega \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = V^*$

设 V 是一维或有限维实向量空间，V^* 是其对偶空间，即：

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$$

那么 V^* 中的元素称为 V 上的**1-形式**，即：

> **1-形式是一个线性函数：**
>
> $$\omega : V \to \mathbb{R}, \quad \omega \in V^*$$

也可称为**协变向量**（covector）或**线性泛函**。

（3）对偶空间的自然基 $\{e^b\}$ 是 1-形式，任何 1-形式都可以写成这组基的线性组合

- 在 $V = \mathbb{R}^n$ 上，任意 1-形式 $\omega \in V^*$ 都可以唯一表示为：

  $$\omega = a_1 \, \mathrm{d}x^1 + \cdots + a_n \, \mathrm{d}x^n$$

  其中 $\{\mathrm{d}x^i\}$ 是对偶基，$a_i \in \mathbb{R}$。
- 对任意 $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$，该 1-形式的作用为：

  $$\omega(v) = a_1 v^1 + \cdots + a_n v^n$$

II. 对偶空间的张量积，向量空间上的 k 形式，对偶空间的 k 次外幂空间（向量空间的 k-形式空间）

$(V^*)^{\otimes k}$：对偶空间 V^* 的 k 次张量积空间

设 V 是一维数为 n 的实向量空间，V^* 是其对偶空间。

我们考虑 V^* 的 k 次张量积空间：

$$(V^*)^{\otimes k} := \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k\text{ 次}}$$

它由所有 k-线性映射：

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

组成，要求这些映射使得每个输入方向都线性。这里的元素称为 **协变 k 阶张量**（covariant k-tensor）

$(V^*)^{\otimes k}$ 是下文介绍的“向量空间上的 k-形式”生活的空间（实际上它们生活的空间是该空间的子空间$\Lambda^k V^*$，称为对偶空间 V^* 上的第 k 外幂空间）**

向量空间上的 k -形式：定义

一个 k-线性映射 $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ 是一个 k-形式，当且仅当：

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k) \quad \forall \sigma \in S_k$$

即：**对任意置换，符号改变导致符号翻转。**
特别地：

- 如果交换任意两个输入向量，则符号翻转；
- 如果两个输入向量相等，则 $\omega = 0$；
- 因此是“斜对称张量”。

定义重述：一个 k-形式就是一个定义在向量空间 V 上的 k 阶完全反对称协变张量，k -形式生活在“对偶空间 V^* 上的第 k 外幂空间，也称为 **k 次外代数空间”，称为 k-形式空间

k-形式构成的集合： $\Lambda^k V^* \subset (V^*)^{\otimes k}$ 称为向量空间 V 上的 “k-形式空间”

我们定义 $(V^*)^{\otimes k}$ 的一个子空间，包含所有**完全反对称的 k-线性映射**，称为 V 上的 k-形式空间，记作：

$$\Lambda^k V^* \subset (V^*)^{\otimes k}$$

它是 V 的对偶空间 V^* 上的**第 k 外幂空间**，也称为 **k 次外代数空间**。

$\Lambda^k V^* \subset T^k V^*$

小结

- k-形式是对偶空间中一种特殊的多线性映射；
- 它们是 V^* 上完全反对称的 k 次张量；
- $\Lambda^k V^*$ 是从线性代数出发定义的，**无需任何流形结构**。

III. 外积（Wedge Product）

我们为何需要外积？

- 我们已经知道，流形上的 1-形式是“**作用在切向量上的线性函数**”。
- 如果我们想表达“作用于多个切向量的联合结果”，例如面积、体积或流量，就必须构造高阶形式。
- 但普通张量积不能区分这些几何量的“**方向感**” —— 也就是说，它们没有**反对称性**。

> 举例：在面积的几何表达中，(v_1, v_2) 与 (v_2, v_1) 所定义的有向面积相反，普通张量却无法体现这一点。

也就是说，我们希望构造一种函数：

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}, \quad \text{线性于每个参数}$$

其中 ω 接受 k 个向量作为输入，是一个 k 重线性函数。
此外，我们还希望这个函数具有如下性质：

- 只要有两个输入相等，则结果为 0；
- 交换任意两个输入，会改变符号。
  这就引出了“外积”的定义，它构造出满足这些反对称性的多线性函数。

定义：（1-形式的）外积

设 $f_1, \ldots, f_k \in V^*$，定义它们的**外积**为如下函数：

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k(v_1, \ldots, v_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot f_1(v_{\sigma(1)}) \cdots f_k(v_{\sigma(k)})$$

其中：

- S_k 是 k 个元素的置换群；
- $\operatorname{sign}(\sigma)$ 是置换的符号；
- 每一项都是将 f_i 作用在不同顺序排列的 v_j 上。

该定义下，$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$ 是一个满足：

- 多线性性（对每个 v_i 变量线性）；

- 完全反对称性（交换任意两输入变号，输入中有两个相等则为零

（1）对偶基 $\{e^b\} \subset V^*, \{e^b\} \subset \Lambda^1 V^*$ 的外积

- 考虑向量空间 V 和其对偶空间 V^*，对偶基 $\{e^b\}$ 显然是 1-形式，即 $\{e^a\} \subset \Lambda^1 V^*$ ，因此可以定义两个对偶基的外积：
- 外积定义为：

$$e^a \wedge e^b = e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a$$

  因此，它们组合成一个 **二阶反对称张量**，也就是一个 2-形式。

（2）一般 k 形式和 l 形式的外积

更一般地，若 $\omega \in \Lambda^k(V^*)$、$\eta \in \Lambda^l(V^*)$，则

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

其中 Alt 是反对称化算子，它将张量映射到全反对称形式

外积：基本性质

1. **反对称性（graded-commutative）**
   对于$\omega \in \Lambda^k(V^*)$，$\eta \in \Lambda^l(V^*)$，有

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

2. **线性**
   外积对每个因子都是线性的，支持标量乘法和加法。
3. **结合性**

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

几何直观意义

- 外积结合了多个 1-形式（线性泛函），形成一个可以作用于多个切向量的高阶反对称映射；
- 在二维中，$dx^1 \wedge dx^2$表示面积元素，在三维中，$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$表示体积元素；
- 外积的反对称性体现了体积的方向性（交换因子会改变符号），适用于导出积分方向关系等。

IV. 流形上的 k 形式场

（1） $(T_p^* M)^{\otimes k}$： 余切空间 $T_p^* M$ 的 k 次张量积空间

设 M 是一 n 维光滑流形，$p \in M$ 为一点。记 T_p^*M 为 p 点处的余切空间。
对任意正整数 k，我们定义 T_p^*M 的 k 次张量积空间为：

$$(T_p^*M)^{\otimes k} := \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{k\text{ 次}}$$

这是 T_p^*M 与自身的 k 次张量积空间
其元素称为 p 点处的 **协变 k 阶张量**（covariant tensors of rank k），它们是如下类型的多重线性映射：

$$T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}, \qquad (\text{共 } k \text{ 个 } T_pM)$$

即它们将 k 个切向量输入，输出一个实数，且关于每个变量线性。

（2） $\omega_p \in (T_p^*M)^{\otimes k}$ ： k-形式首先是 k 阶协变张量

T_p^*M 中的元素是线性函数（作用在 T_pM 上），而其 k 次张量积空间中元素是：

> 一个 k 线性函数：
>
> $$\omega_p : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{ 个}} \to \mathbb{R}$$
>
> 它是关于每个变量线性的，但**没有对称性或反对称性要求。**

这类张量可以用来构造更一般的张量场、差分形式、对称张量等。

（3） $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ ：并且要求一个 k 形式必须是一个完全反对称的 k 阶协变张量

张量积空间 $T_p^*M^{\otimes k}$ 中的元素是**任意的协变张量**，而 k-形式是其中的一个子集：

- 所有 k 阶**完全反对称的协变张量**构成（余切空间 T_p^*M 的）k 次外幂空间（Exterior power）：

$$\Lambda^k T_p^*M \subset T_p^*M^{\otimes k}$$

- 即：k-形式是**满足交错性条件**的 k 阶协变张量。

（4）k-形式场就是在流形的每一点选择一个 k 形式，并要求这种选择随流形上点的变化是光滑变化的

> **定义：**
> 一个 k-形式场（k-form field）是一个将流形上的每一点 $p \in M$ 映射到一个 k-形式 ω_p 的规

> 则：
>
> $$\omega : p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$$
>
> 并且要求这个映射在流形意义下**光滑变化**。

其中记号 $\Lambda^k(T_p^*M)$ 表示余切空间 T_p^*M 的第 k 外幂，也就是定义在流形上点 $p \in M$ 的切空间上的 k 形式的集合

（5）k-形式场 $\omega \in \Omega^k(M)$ 可以直观地理解为：

> 在流形 M 的每一个点 $p \in M$，我们选择一个定义在切空间 T_pM 上的 k-形式
>
> $$\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$$
>
> 并要求这种选择在 p 随流形变化时是 **光滑的**。

也就是说，k-形式场是将每个点处的 k-形式“拼接”在一起，形成一个全局的、光滑变化的几何对象。

（6）记流形 M 上 k -形式场的集合为 $\Omega^k(M)$

三、拉格朗日密度：动机

I. 系统的动力学定义在 Jet 丛上：拉格朗日量定义在是定义在 J^1Y 上的函数（即流形 J^1Y 上的标量场）

我们不加证明地指出（稍后说明原因）：在几何语言中，系统的动力学不再是传统意义上定义在点空间（如 $q(t), \dot{q}(t)$）的函数，而是定义在**构型丛 $Y \to X$ 的截面及其导数组成的空间**上，即一阶 Jet 丛 J^1Y。

我们引入以下结构：

- **构型丛** $\pi : Y \to X$
  - X 是底流形，例如经典力学中 $X = \mathbb{R}$ 表示时间轴；
  - Y 是总空间，纤维为构型空间 Q；
  - 一个截面 $\Phi : X \to Y$ 给出系统在 X 上的演化轨迹。
- **一阶 Jet 丛** J^1Y
  - 每个点为某截面 Φ 在某点 $x \in X$ 的一阶 jet，记作 $j_x^1(\Phi)$；
  - 局部坐标表示为 (x^i, y^a, y_i^a)，其中：
    - $y^a = \Phi^a(x)$ 表示截面在该点的值，

- $y^a_i = (\mathrm{d}\Phi_x)^a_i$ 表示 Φ^a 对 x^i 的偏导。

> 拉格朗日量是定义在 Jet 丛上的函数：
>
> $$L : J^1Y \to \mathbb{R}, \quad L(x^i, y^a, y^a_i)$$
>
> 它对每一个截面及其导数赋值，用于后续构造作用泛函。

II. 函数不能直接在流形上积分：从拉格朗日量（函数）到拉格朗日密度

问题：函数 L 与体积形式 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 的组合并非天然几何对象

虽然 L 是 Jet 丛上的一个良好函数，但我们若试图直接在 X 上积分构造作用泛函：

$$S[\Phi] = \int_X L(x^i, y^a(x), y^a_i(x)) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

这面临一个关键问题：

> **函数 L 与体积形式 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 的组合并非天然几何对象**

原因在于：

- L 只是一个数值函数，**对坐标变换没有良好协变性**；
- $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 是一个 n-形式，但二者组合缺乏几何意义；
- 因此**整个表达式在坐标变换下会改变，积分值也不具有几何不变量性质。**
  这违反了物理要求：作用量应具有坐标无关性（特别是在时空协变理论中）。换言之，L **本身不够几何，不可直接用于积分。**

解决方案：将拉格朗日量提升为拉格朗日密度（n-形式场，注意 n 是底空间维度而非总空间维度）

为克服上述问题，我们引入几何上天然良定义的对象 —— **拉格朗日密度** $\mathcal{L}$：

> **定义：** 拉格朗日密度是定义在 Jet 丛 J^1Y 上的一个 n-形式场，属于：
>
> $$\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$$
>
> 它在每一点 $j^1_x(\Phi) \in J^1Y$ 上赋予一个 n-形式，能够自然拉回到 X 上进行积分。

现在我们可以以**几何的方式**重新构造作用泛函：

1. 给定一个场 $\Phi : X \to Y$，其一阶 Jet 延拓是 $j^1\Phi : X \to J^1Y$；

2. 拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 是 J^1Y 上的一个 n-形式场；
3. 我们将 $\mathcal{L}$ 沿 $j^1\Phi$ **拉回到 X 上**，得到一个可积分的 n-形式场：

$$(j^1\Phi)^*\mathcal{L} \in \Omega^n(X)$$

4. 最终作用泛函定义为：

$$S[\Phi] := \int_X (j^1\Phi)^*\mathcal{L}$$

拉格朗日密度 $\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$ 的优点

- $\mathcal{L}$ 是 J^1Y 上的几何对象，不依赖坐标系统；
- 拉回后的 $(j^1\Phi)^*\mathcal{L}$ 是 X 上的 n-形式场，可自然积分；
- 表达式在任意坐标变换下协变，积分值为几何不变量；
- 为变分与运动方程的导出提供了结构基础（如 Euler-Lagrange 方程的几何表达）。

四、拉格朗日密度：定义

在经典场论与几何变分理论中，拉格朗日密度（Lagrangian density）是定义动力学与作用量泛函的基本几何对象。它并非仅仅是一个函数，而是一个定义在 Jet 丛上的 **n-形式场**，其结构确保了作用量在流形上积分的协变性和几何不变性。

I. 几何背景：Jet 丛与拉格朗日结构的自然位置

设：

- X 是 n 维光滑流形，称为 **底空间**（Base space），例如时空；
- $\pi : Y \to X$ 是一个光滑纤维丛，称为 **构型丛**（Configuration bundle）；
- J^1Y 是 Y 的一阶 Jet 丛，其点 $j^1_x(\Phi)$ 描述截面 $\Phi : X \to Y$ 在点 x 处的 1 阶导数信息。

Jet 丛 J^1Y 是定义变分系统与拉格朗日结构的自然空间

II. 拉格朗日密度的定义（作为 n-形式场）

我们定义：

> **拉格朗日密度** 是 J^1Y 上的一个 n-形式场（$n = \dim X$）：
>
> $$\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$$
>
> 即：$\mathcal{L}$ 是 J^1Y 上余切丛 T^*J^1Y 的 n 次外幂丛上的一个光滑截面。

III. 水平 n-形式的约束（可积性要求）

注意，Jet 丛 J^1Y 的维度大于 X，所以 n-形式可以有很多种构造方式。

但我们要求：

> 拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 是一个 **“水平 n-形式”** 场，即它在每一点 $j^1_x(\Phi) \in J^1Y$ 上，完全由底空间 X 的方向诱导的余切空间张成：
>
> $$\mathcal{L}(j^1_x(\Phi)) \in \Lambda^n(\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(\Phi)} J^1Y) \cong \Lambda^n T^*_x X$$
>
> 这里 $\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(\Phi)} J^1Y$ 表示与底空间 X 平行方向相关的余切空间。

IV. 局部表达（坐标形式）

设 x^i 是 X 的局部坐标，y^μ 是 Y 上纤维方向的局部坐标，y^μ_i 是一阶 Jet 坐标。

则 $\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$ 的局部表达形如：

$$\mathcal{L} = L(x^i, y^\mu, y^\mu_i)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

其中：

- $L : J^1Y \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，称为**拉格朗日函数**；
- $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 是底空间方向的体积 n-形式；
- 整体表达式是 Jet 丛 J^1Y 上一个 n-形式（**在坐标变换下具有良好协变性**）。

疑问：如何用坐标 1-形式构造一个 n-形式场？

设：

- M 是一个 m 维光滑流形；
- (U, ϕ) 是 M 上的一个局部坐标图，坐标函数为 $x^1, \ldots, x^m$；
- 诱导出的坐标 1-形式为 $\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^m \in \Omega^1(U)$；
  我们希望构造一个定义在 (M) 上的 n-形式场（$n \le m$）：

$$\omega \in \Omega^n(M)$$

(1)确定坐标诱导的 n-形式基

由坐标 1-形式外积可得：

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}, \quad \text{其中 } 1 \le i_1 < \cdots < i_n \le m$$

这组形式在每个局部开集 $U \subset M$ 上构成 $\Lambda^n T^*M$ 的局部基。

（2）引入光滑函数系数

任取一组光滑函数 $f_{i_1\cdots i_n} \in C^\infty(U)$，定义：

$$\omega := \sum_{1\le i_1<\cdots<i_n\le m} f_{i_1\cdots i_n}(x)\cdot \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

即：将坐标诱导的 n-形式基与光滑函数作为系数线性组合，得到一个局部定义的 n-形式场。

（4）说明其为 n-形式场

此构造满足：

- 对每个 $x\in U$，$\omega_x \in \Lambda^n(T_x^*M)$；
- ω 对坐标变化有良好变换性（因坐标形式与函数系数皆适当变换）；
- 故 $\omega\in\Omega^n(U)\subset\Omega^n(M)$ 是一个 n-形式场。

V. 拉格朗日密度的拉回（在截面上）

给定一个截面 $\Phi : X\to Y$，我们可定义其一阶 Jet 延拓：

$$j^1\Phi : X\to J^1Y,\quad x\mapsto j_x^1(\Phi)$$

通过拉回操作，得到一个定义在 X 上的 n-形式场：

$$(j^1\Phi)^*\mathcal{L}\in\Omega^n(X)$$

这是真正可以在 X 上进行积分的对象：

$$S[\Phi] := \int_X (j^1\Phi)^*\mathcal{L}$$

这才是定义作用泛函（Action Functional）的几何正确表达。

五、总结

问题	解决方案
函数 L 无法几何自然积分	提升为 $\mathcal{L} : J^1Y\to\Lambda^n(T^*(J^1Y))$
坐标变换下不具协变性	n-形式具有良好坐标变换行为

问题	解决方案
$S[\Phi]$ 在几何上不良定义	使用 $\mathcal{L}$ 保证几何良定义与物理协变性