D01X. k形式场的拉回

jet 丛 J^1Y 作为光滑流形，拉格朗日密度是定义在其上的 n-形式场（$n = \dim X$），我们希望通过 $X \to J^1Y$ 的（由截面 Φ 自然诱导的）映射 $j^1\Phi$ 将其拉回到流形 X 上；但这涉及一些虽然简单但需要系统整理的背景知识，这些内容的系统性导出比较浪费篇幅（所以D02写得有点长），如果不追求逻辑上的环环相扣，相关概念可以以一种松散的递进顺序列出，本节基于这种想法编排相关内容。

一、前置：（光滑流形上）函数（即标量场）的拉回

I. 背景设置

设 M 与 N 为两个光滑流形，$\Phi : M \to N$ 为一个光滑映射（smooth map）。我们记 $C^\infty(N)$ 表示 N 上的实值光滑函数的集合，即

$$C^\infty(N) := \{f : N \to \mathbb{R} \mid f \text{ 是光滑函数}\}$$

（1）M, N 分别为 m, n 维的光滑流形

（2）$\Phi : M \to N$ 是流形间的光滑映射

（3）$f \in C^\infty(N)$ 是 N 上的光滑函数（取值于 $\mathbb{R}$ 的光滑映射）

II. 光滑流形 N 上函数 f 关于 $\Phi : M \to N$ 的拉回 $\Phi^* f$

$\Phi^* f := f \circ \Phi$： 定义

给定 $f \in C^\infty(N)$，定义其沿 Φ 的**拉回**（pullback）为函数

$$\Phi^* f := f \circ \Phi : M \to \mathbb{R}$$

换言之，对任意 $p \in M$，有

$$(\Phi^* f)(p) = f(\Phi(p))$$

（1）Φ 先将流形 M 上的一点 $p \in M$ 推送到 N 上的一点 $\Phi(p) \in N$

（2）N 上的函数 f 再将 $\Phi(p)$ 映到 $\mathbb{R}$ 上一点

（3）得到复合函数 $f \circ \Phi : M \to \mathbb{R}$

III. 函数空间的拉回算符 Φ^*

记号 $\Phi^*: C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ 是一个映射，称为**函数空间的拉回算符（pullback operator）**。该算符满足以下代数性质：

- **线性性**：$\Phi^*(af+bg) = a\Phi^*f + b\Phi^*g$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，$f, g \in C^\infty(N)$；
- **乘法保持**：$\Phi^*(fg) = \Phi^*f \cdot \Phi^*g$；
- **单位函数保持**：$\Phi^*(1) = 1$，其中 1 表示常值函数 $x \mapsto 1$。

IV. 总结

给出 N 上的标量场 f，以及光滑流形间的映射 $\Phi: M \to N$
我们可以通过 $\Phi: M \to N$ 将 N 上的标量场 f **拉回** 到 M 上的标量场 $\Phi^* f$
之所以称为“拉回”，是相对拉回的媒介 Φ 的方向而言的

二、前置：光滑流形上的 k 形式场

I. 余切空间 T_p^*N 与 k 次外代数

（1）流形 N 上点 $p \in N$ 处的余切空间 T_p^*N

严格的数学定义：

> 流形 N 上点 $p \in N$ 处的余切空间 T_p^*N 是 p 点处切空间 T_pN 的对偶空间，即
>
> $$T_p^*N := \mathrm{Hom}(T_pN, \mathbb{R}),$$
>
> 它由所有从 T_pN 到实数域 $\mathbb{R}$ 的**线性函数**（也就是向量空间 T_pN 和实数域 $\mathbb{R}$ 的同态）构成。

（2）余切空间 T_p^*N 的第 k 次外幂（外积）空间 $\Lambda^k(T_p^*N)$

严格数学定义

> $\Lambda^k(T_p^*N)$ 是 T_p^*N 的第 k 次外幂空间，亦即点 p 处所有从 $(T_pN)^k$ 到 $\mathbb{R}$ 的完全反对称的 k-线性函数所构成的向量空间：
>
> $$\Lambda^k(T_p^*N) := \{\omega : (T_pN)^k \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ 多重线性且完全反对称}\}$$

另外

> **记号说明**：该记号 Λ^k 源自**外代数（exterior algebra）**中的外幂构造，符号 Λ^k 表示对偶空间 T_p^*N 的 k 次**外积空间**，其元素也称为 **k-形式**。外积符号 $\wedge$ 定义了 $\Lambda^\bullet(T_p^*N)$ 中的代数结构。

（3）$\Lambda^k(T_p^*N)$ 上的一个元素 ω_p 称为流形的点 $p \in N$ 上的一个 k-形式

II. 流形上的 k-形式丛（Exterior Bundle）$\Lambda^k(T^*N)$

将流形上每一点的（余切空间 T_p^*N 的 k 次外幂空间） $\Lambda^k(T_p^*N)$ 组织起来，可得一个光滑向量丛：

$$\Lambda^k(T^*N) := \bigsqcup_{p\in N} \Lambda^k(T_p^*N)$$

称为 N 上的 **k-形式丛**，或称为 k **次外幂余切丛**。这是一个以 N 为底空间的光滑向量丛

$\Lambda^k(T^*N)$ 称为流形 N 上的 k-形式丛，或称流形 N 的 k 次外幂余切丛

III. 流形 N 上的 k 形式场 $\omega : N \to \Lambda^k(T^*N)$

一个 **k-形式场**是k-形式丛上的一个光滑截面，即：

$$\omega \in \Gamma^\infty(\Lambda^k(T^*N)) =: \Omega^k(N)$$

其中 Γ^∞ 表示光滑截面空间。换句话说，ω 是一个映射

$$\omega : N \to \Lambda^k(T^*N), \quad p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p^*N)$$

使得 ω 相对于 N 的光滑结构是光滑的

（1）流形 N 的 k 次外幂余切丛 $\Lambda^k(T^*N)$ 上光滑截面的集合记作： $\Gamma^\infty(\Lambda^k(T^*N))$

（2）流形 N 上的一个 k-形式场 ω 就是 $\Gamma^\infty(\Lambda^k(T^*N))$ 中的一个截面

（3）记流形 N 上的 k-形式场构成的集合为 $\Omega^k(N) := \Gamma^\infty(\Lambda^k(T^*N))$

（4）一个 k-形式场 ω 就是一个截面 $N \to \Lambda^k(T^*N)$，也就是说 $\omega : p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p^*N)$

三、k-形式场的拉回

I. 背景设定

（1）M, N 分别为 m, n 维的光滑流形

（2）$\Phi : M \to N$ 是流形间的光滑映射

（3）$\omega : N \to \Lambda^k(T^*N)$ 是流形 N 上的 k 形式场

II. k-形式的拉回

$(\Phi^*\omega)_p = \omega_{\Phi(p)} \circ T_p\Phi^{\wedge k}$**：定义**

令 $p \in M$，$v_1, \dots, v_k \in T_pM$，则定义：

$$(\Phi^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(p)}\left((T_p\Phi)(v_1), \dots, (T_p\Phi)(v_k)\right)$$

即：

- 先通过局部切映射 $T_p\Phi$ 把 T_pM 上切向量 v_i 推送到 $T_{\phi(p)}N$；
- 然后用 $\omega_{\Phi(p)}$ 作用这些切向量，得到实数；
- 所以 $(\Phi^*\omega)_p$ 确实是 M 上的 k-形式

k-形式的拉回可以近似写成函数链 $T_pM \xrightarrow{(\mathrm{d}\Phi)_p} T_{\Phi(p)}N \xrightarrow{\omega_{\Phi(p)}} \mathbb{R}$

II. k- 形式场的拉回

（0）由（底）流形间的映射 $\Phi : M \to N$ 诱导切丛间的切映射 $\mathrm{d}\Phi : TM \to TN$

（1）$\mathrm{d}\Phi_p$ 先将切空间 T_pM 上的一点 $v \in T_pM$ 推送到 $T_{\Phi(p)}N$ 上的一点 $\mathrm{d}\Phi_p(v) \in T_{\Phi(p)}N$

（2）$T_{\Phi(p)}N$ 上的 k-形式 $\omega_{\Phi(p)}$ 再将 $((\mathrm{d}\Phi)_p(v_1), \dots, (\mathrm{d}\Phi)_p(v_k))$ 映到 $\mathbb{R}$ 上一点

四、拓展阅读

更加严格的语境下，我们采取的定义顺序是按照以下逻辑：

- 使用“光滑丛间光滑映射诱导切映射”的思路定义了流形间光滑映射 $\Phi : M \to N$ 在流形的切丛上诱导的**切映射** $T\Phi : TM \to TN$，定义性质要求切映射满足**局部表达式** $T_p\Phi(v)[f] = v[f \circ \Phi]$
- 然后定义流形上任意 **切向量 v 的推前** $\Phi_* : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$；要求满足 $\Phi_*v[f] = v[f \circ \Phi]$
  - 但是 $v[f \circ \Phi] =: T_p\Phi(v)[f]$
  - 因此 $\Phi_*v = T_p\Phi(v), \quad v \in T_pM$；换言之 **切向量的推前** 和 **（局部）切映射作用于切向量** 本质上是同一回事
    - 如果（合理地）将切向量和推前后的切向量都视为（流形上光滑函数的）泛函，则 **推前后的切向量作为泛函** 可以写作复合函数形式 $\Phi_*v := v \circ \Phi^*$， 其中 Φ^* 是定义在 $C^\infty(N)$ 上的拉回映射
    - 如果（非正式地）将切向量和推前后的切向量都视为（流形上1-形式的）泛函，则 **推前后的切向量作为泛函** 可以写作复合函数形式 $\Phi_*v := v \circ T^*_{\Phi(p)}\Phi = v \circ \Phi^*$；其中$\Phi^*$ 和局部余切映射 $T^*_{\Phi(p)}\Phi$ 都是1-形式的拉回，即定义在 $T^*_{\Phi(p)}N$ 上的拉回映射
  - 再**切向量**的推前的基础上定义 **向量场的推前** Φ_*V：要求满足局部表达式 $(\Phi_*V)_{\Phi(p)}[f] = V_p[f \circ \Phi]$
    - 但是 $V_p[f \circ \Phi] =: T_p\Phi(V_p)[f]$
    - 因此 $(\Phi_*V)_{\Phi(p)} = T_p\Phi(V_p)$；换言之 **切向量场的推前** 和 **（局部）切映射作用于向量场在局部的场值** 本质上是同一回事

- 并且，**向量场的推前映射** $\Phi_*:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(N)$ 是截面空间间的映射（因为向量场可以视为切丛的截面）$\Phi_*:\Gamma(TM)\to\Gamma(TN)$，其对具体向量场作用效果可以写作复合函数形式：$\Phi_*V=T\Phi\circ V\circ\Phi^{-1}$

- 然后利用 **切映射** 定义 **余切映射** $T^*\Phi:T^*N\to T^*M$ 为其对偶结构，即要求满足 **局部表达式** $T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha)[v]=\alpha[T_p\Phi(v)]$
- 同理，利用 **切向量的推前** 定义 **余切向量的拉回** $\Phi^*:T^*_{\Phi(p)}N\to T^*_pM$ 为其对偶结构，即要求满足 $\Phi^*\alpha[v]=\alpha[\Phi_*v]$
  - 但是 $\alpha[\Phi_*v]=\alpha[T_p\Phi(v)]=T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha)[v]$
  - 因此 $\Phi^*\alpha[v]=T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha)[v]$；换言之 **1-形式的拉回** 和 **（局部）余切映射作用于1-形式** 本质上是同一回事
    - 如果（合理地）将1-形式和拉回后的1-形式都视为（流形上切向量的）泛函，则 **拉回后的1-形式作为泛函** 可以写作复合函数形式 $\Phi^*\alpha=\alpha\circ T_p\Phi=\alpha\circ\Phi_*$，其中 Φ_* 和局部切映射 $T_p\Phi$ 都是切向量的推前，即定义在 T_pM 上的推前映射
  - 再在 **1-形式** 的拉回的基础上定义 **1-形式场的拉回** $\Phi^*\omega$： 要求满足局部表达式 $(\Phi^*\omega)_p[v]=\omega_p[\Phi_*v]$
    - 但是 $\omega_p[\Phi_*v]=\omega_p[T_p\Phi(v)]=T^*_{\Phi(p)}\Phi(\omega_p)[v]$
    - 因此 $(\Phi^*\omega)_p=T^*_{\Phi(p)}\Phi(\omega_p)$；换言之 **1-形式场的拉回** 和 **（局部）余切映射作用于1-形式场的局部场值** 本质上是同一回事
    - 并且，**1-形式场的拉回映射** $\Phi^*:\Omega^1(N)\to\Omega^1(M)$ 也是截面空间间的映射（1-形式场可以视为余切丛的截面）$\Phi^*:\Gamma(T^*N\to T^*M)$，其对具体1-形式场的作用效果可以写成复合函数形式：$\Phi^*\omega=T^*\Phi\circ\omega\circ\Phi$

在此整理复合函数形式的几个公式：

$$\text{推前后的切向量：}\ \boxed{\Phi_*v:=v\circ\Phi^*},\boxed{\Phi_*v:=v\circ T^*_{\Phi(p)}\Phi=v\circ\Phi^*}\quad,$$

$$\text{推前后的切向量场：}\ \boxed{\Phi_*V=T\Phi\circ V\circ\Phi^{-1}}\quad;$$

$$\text{拉回后的1-形式：}\ \boxed{\Phi^*\alpha=\alpha\circ T_p\Phi=\alpha\circ\Phi_*}\quad,$$

$$\text{拉回后的1-形式场：}\ \boxed{\Phi^*\omega=T^*\Phi\circ\omega\circ\Phi}\quad.$$

以及切向量的推前/1-形式的拉回的局部定义表达式：

$$\boxed{(\Phi_*V)_{\Phi(p)}[f]=V_p[f\circ\Phi]},\boxed{(\Phi_*V)_{\Phi(p)}=T_p\Phi(V_p)}\quad;$$

$$\boxed{(\Phi^*\omega)_p[v]=\omega_p[\Phi_*v]},\boxed{(\Phi^*\omega)_p=T^*_{\Phi(p)}\Phi(\omega_p)}\quad.$$