D02. 拉格朗日密度的拉回

一、拉格朗日密度：回顾

设：

- X 是维数为 n 的光滑定向流形（作为底空间）；
- $\pi : Y \to X$ 是维数为 $n+m$ 的纤维丛，总空间 Y 表示构型空间；
- J^1Y 是 Y 的一阶 Jet 丛，局部坐标记为 (x^i, y^μ, y^μ_i)；
- 截面 $\Phi : X \to Y$ 的一阶 Jet 延拓为 $j^1\Phi : X \to J^1Y$，点 $x \in X$ 映到 $j^1_x(\Phi) \in J^1Y$。

我们定义**拉格朗日密度**为：

$$\mathcal{L} : J^1Y \to \Lambda^n(\mathrm{Hor}^* J^1Y)$$

其中 $\mathrm{Hor}^* J^1Y$ 表示 J^1Y 上的**水平余切丛**，其每一点处的纤维与 $T^*_x X$ 同构。

因此，对于每一点 $j^1_x(\Phi) \in J^1Y$，我们有：

$$\mathcal{L}(j^1_x(\Phi)) \in \Lambda^n(\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(\Phi)} J^1Y) \cong \Lambda^n T^*_x X$$

I. 拉格朗日密度是一个“水平 n-形式”场

拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 是一个 **“水平 n-形式”** 场，即它在每一点 $j^1_x(\Phi) \in J^1Y$ 上，完全由底空间 X 的方向诱导的余切空间张成：

$$\mathcal{L}(j^1_x(\Phi)) \in \Lambda^n(\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(\Phi)} J^1Y) \cong \Lambda^n T^*_x X$$

这里 $\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(\Phi)} J^1Y$ 表示与底空间 X 平行方向相关的余切空间。

J^1Y 上的水平 n-形式场：定义

在一阶 Jet 丛 J^1Y 上，我们可以定义各种形式场（differential form fields）。
其中，**水平 n-形式场（horizontal n-form field）** 是一类特别重要的对象，它只沿底空间 X 的方向取值，与纤维方向“正交”。

设 X 是维数为 n 的光滑流形，$Y \to X$ 是一个纤维丛，J^1Y 为其一阶 Jet 丛。
我们称 $\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$ 是一个**水平 n-形式场**，当且仅当在任一点 $j^1_x(s) \in J^1Y$ 处，它的值只作用在**水平方向**，即：

$$\mathcal{L}(j^1_x(s)) \in \Lambda^n(\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(s)} J^1Y)$$

其中 $\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(s)}J^1Y$ 是 J^1Y 上与底空间 X 相切方向的余切空间（坐标上表现为 dx^i 张量积张成的子空间）

什么叫做“水平 n 形式场在任意点的取值只作用于水平方向”?

- 首先，所谓“在任意点的取值”
  - 是指该场在空间某点的取值
  - 在这里指 $\mathcal{L}$ 在 J^1Y 上的某点 $j^1_x(s)=(x^i,y^\mu,y^\mu_i)$上的取值
  - n 形式场在某点的取值自然是一个“n-形式”
    - 而一个（$T_{j^1_x(s)}(J^1Y)$ 上的） n 形式就是一个 n 阶完全反对称协变张量，取值于（$T_{j^1_x(s)}(J^1Y)$ 的）n 形式空间 $\Lambda^n(T^*_{j^1_x(s)}(J^1Y))$
- 在此基础上，所谓“取值只作用于水平方向”
  - 就是说当我们在 $\mathcal{L}(j^1_x(s))$ 的取值空间 $\Lambda^n(T^*_{j^1_x(s)}(J^1Y))$ 选取一个值，也就是一个 n-形式时
  - 我们只选择这样的 n-形式，当它作用于 $T_{j^1_x(s)}(J^1Y)$ 上的切向量的张量积时，它：
    - 仅当所有输入向量均为“水平向量”时才可能取非零值；
    - **一旦任一输入向量沿纤维方向（即“垂直方向”），则结果为 0。**
  - 那么什么是 $T_{j^1_x(s)}(J^1Y)$ 上切向量的方向，有哪几种方向呢?
    - 只需考察 J^1Y 在该点的局部坐标 (x^i,y^μ,y^μ_i)
    - 我们知道流形上的局部坐标可以诱导该点切空间上的一组基，因为 J^2Y 上的局部坐标就诱导了 $T_{j^1_x(s)}(J^1Y)$ 上的一组基，这组基就赋予了该切空间上“方向”的概念
      - 水平方向（base direction）就是由 x^i 诱导的切向量基方向
      - 纤维方向（vertical directions from $Y\to X$）就是由 y^μ 诱导的切向量基方向
      - Jet 方向（derivative directions, from $y^\mu_{,i}$）就是由 y^μ_i 诱导的切向量基方向

换言之，$\mathcal{L}(j^1_x(s))$ 的“作用对象”被限制在 $T_{j^1_x(s)}(J^1Y)$ 的一个子空间上，**即“水平切空间”** $\mathrm{Hor}_{j^1_x(s)}J^1Y$。这意味着 $\mathcal{L}(j^1_x(s))$ 实际上属于外幂空间：

$$\mathcal{L}(j^1_x(s))\in\Lambda^n\left(\mathrm{Hor}^*_{j^1_x(s)}J^1Y\right)\subset\Lambda^n\left(T^*_{j^1_x(s)}J^1Y\right)$$

这样的 n-形式称为 **水平 n-形式**。其组成部分仅由 dx^i 张量积生成，**不含** dy^μ 或 dy^μ_i 成分。

拉格朗日密度在 J^1Y 上每点的取值为一个“水平n-形式”，意味着该 n 形式可以由水平方向的坐标 1 形式外积生成

J^1Y 上的水平 n-形式场：局部坐标表示

在局部坐标系下，设 J^1Y 的坐标为 (x^i,y^μ,y^μ_i)，则水平 n-形式场形如：

$$\mathcal{L} = L(x^i, y^\mu, y^\mu_i)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

其中：

- L 是 Jet 丛上的一个光滑函数；
- 仅包含 dx^i 项，**不含** dy^μ 或 dy^μ_i 成分；
- 故属于 $\Lambda^n(\mathrm{Hor}^* J^1 Y)$，是**纯水平**的 n-形式。

为什么拉格朗日场必须是水平 n-形式场？

- （Jet 丛上）水平 n-形式字段的核心特点是：它在 Jet 丛 J^1Y 上，但其“取值方向”完全来自底空间 X。
- 只有这种结构的 n-形式场，才能通过截面 $j^1\Phi$ 拉回到 X 上，变成一个 X 上的可以积分的 n-形式场，从而用于定义作用量。

> 换言之：**拉格朗日密度必须是水平 n-形式场，才能构成有几何意义的作用泛函。**

二、拉格朗日密度的拉回 $\Phi^*\mathcal{L}$

I. 流形上的 k-形式场 ω 关于流形间光滑映射 f 的拉回 $f^*\omega = \omega \circ f$

回顾：光滑流形 N 上的 k 形式场将流形映射到它的 k-形式丛（或称 k 阶外幂丛（Exterior Power Bundle of the Cotangent Bundle））

光滑流形 N 上的一个 k-形式场是这样一个映射

$$\omega \in \Omega^k(N) : N \to \Lambda^k(T^*N)$$

其中 $\Lambda^k(T^*N)$ 称为 N 的 k 形式丛，它的每一个元素是 $\Lambda^k(T^*_pN)$ 中的一个点

k-形式场的拉回：借助切映射 $\mathrm{d}f$

- $f : M \to N$ 是光滑映射；
- $\omega \in \Omega^k(N)$ 是 N 上的 k-形式场，即：

$$\omega : N \to \Lambda^k(T^*N)$$

- 那么组合映射：

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\omega} \Lambda^k(T^*N)$$

  给出 M 上每点 $p \in M$ 映到 N 上点 $f(p)$ 处的 k-形式。

> **但这还不是 M 上的 k-形式**，因为：M 上的 k-形式应满足：
> 在每个点 $p \in M$，给出一个 k-线性函数：

$$(f^*\omega)_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$$

我们真正定义 $f^*\omega$ 为 M 上的 k-形式如下：

令 $p \in M$，$v_1, \ldots, v_k \in T_pM$，则定义：

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) := \omega_{f(p)}\left((\mathrm{d}f)_p(v_1), \ldots, (\mathrm{d}f)_p(v_k)\right)$$

即：

- 先通过切映射 $\mathrm{d}f$ 把 TM 上切向量 v_i 推送到 N 上 $T_{f(p)}N$；
- 然后用 ω 作用这些切向量，得到实数；
- 所以 $f^*\omega$ 确实是 M 上的 k-形式场，记作：

$$f^*\omega \in \Omega^k(M)$$

（1）k-形式的拉回不是简单的复合函数

（2）但 k-形式的拉回可以写成函数链 $T_pM \xrightarrow{(\mathrm{d}f)_p} T_{f(p)}N \xrightarrow{\omega_{f(p)}} \mathbb{R}$

$f^*\omega$ 对 T_pM 上的一组有序切向量的作用效果可以直观地表示为

$$T_pM \xrightarrow{(\mathrm{d}f)_p} T_{f(p)}N \xrightarrow{\omega_{f(p)}} \mathbb{R}$$

（3）如果非要写成复合函数形式：$f^*\omega = \omega \circ \mathrm{d}f^{\wedge k}$

写法	意义说明
$\omega \circ f$	映射到 N 上某点的 k-形式，但**不在正确的丛上**，无法直接定义为 M 上的 k-形式
$f^*\omega$	真正定义在 M 上的 k-形式，通过 $T_pM^k \to \mathbb{R}$
$f^*\omega = \omega \circ \mathrm{d}f^{\wedge k}$	可接受的复合表达，表示先推向 N 再作用于 k-形式

II. 拉格朗日密度语境下的情形

仿照上文，我们有：$(j^1\Phi)^*\mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathrm{d}(j^1\Phi)^{\wedge n}$

在我们的语境中：

- $\mathcal{L}$ 是 Jet 丛 J^1Y 上的 n-形式场；
- $j^1\Phi : X \to J^1Y$ 是一个从 X 到 Jet 丛的光滑映射；

- 故可定义其拉回：

$$(j^1\Phi)^*\mathcal{L} \in \Omega^n(X)$$

  这是定义在 X 上的 n-形式场，可自然地用于积分构造作用量

$$T_xX \xrightarrow{(\mathrm{d}(j^1\Phi))_x} T_{j^1_x\Phi}J^1Y \xrightarrow{\mathcal{L}_{\Phi(x)}} \mathbb{R}$$

（1）截面的 jet 延拓 $j^1\Phi : X \to J^1Y$ 作为光滑流形间的光滑映射

（2）$j^1\Phi$ 通过它的切映射 $\mathrm{d}(j^1\Phi)$ 将流形 X 上的切向量推送为 J^1Y 上的切向量

我们设：

- X 是 n 维底空间（独立变量空间），有局部坐标 x^i，
- $Y \to X$ 是一个纤维丛，总维度为 $m+n$，局部坐标 (x^i, y^μ)，
- $\Phi : X \to Y$ 是 Y 的一个截面，即在局部表达为：

$$\Phi(x) = (x^i, \Phi^\mu(x))$$

- $j^1\Phi : X \to J^1Y$ 是 Φ 的一阶 jet 延拓，映射每个点 $x \in X$ 到：

$$j^1_x(\Phi) := \big(x^i, \Phi^\mu(x), \partial_i\Phi^\mu(x)\big)$$

  是 J^1Y 上一点的局部坐标表示。

考虑微分映射：

$$(\mathrm{d}j^1\Phi)_x : T_xX \to T_{j^1_x(\Phi)}J^1Y$$

它将底空间 X 上某点 x 的切向量 $v \in T_xX$，**推送**为 J^1Y 上某点 $j^1_x(\Phi)$ 的切向量。
这个映射的几何意义：将底空间 X 上的微小变化，**通过截面 Φ 的一阶行为**，提升为 Jet 丛 J^1Y 上的变化。

要确定切映射对切向量的作用效果，只需确定 $\mathrm{d}(j^1\Phi)_x$ 对 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的作用效果

首先，我们知道任意映射 f 的切映射$\mathrm{d}f_x$ 对切向量基的作用效果为

$$\boxed{\mathrm{d}f_x(\partial_i) = \partial_i[f^a]\partial_a}$$

当前语境下：

- $\mathrm{d}f_x$ 被替换为 $\mathrm{d}(j^1_x\Phi)_x$
- ∂_i 就是 T_xX 的坐标基
- f^a 被替换为 $\mathrm{d}(j^1_x\Phi)^a$，并且可以被分解为三部分：$f^a = (x^j, \Phi^\mu, \Phi^\mu_{\ k})$

- 对应的，∂_a 作为 $T_{j^1_x\Phi}J^1Y$ 上的坐标基也可以分解为三部分
  因此对于任意 ∂_i 被推送到 $T_{j^1_x\Phi}J^1Y$ 的结果，我们也可以分三部分处理：
- $\partial_i(x^j)\cdot\partial_j=\partial_i$
- $\partial_i(\Phi^\mu)\cdot\partial_\mu$
- $\partial_i(\partial_k(\Phi^\mu))\cdot\frac{\partial}{\partial y^\mu_j}$

换言之

$$(\mathrm{d}j^1\Phi)_x(v)=v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{j^1_x(\Phi)}+\frac{\partial\Phi^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\bigg|_{j^1_x(\Phi)}+\frac{\partial^2\Phi^\mu}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\mu_j}\bigg|_{j^1_x(\Phi)}\right)$$

这说明，T_xX 上的任意切向量被切映射 $\mathrm{d}(j^1_x\Phi)$ 映射到 $T_{j^1_x\Phi}J^1Y$ 中的这样一个分量

- x^i 分量：继承自 X；
- y^μ 分量：由 $\Phi^\mu(x)$ 对 x^i 的导数给出；
- y^μ_i 分量：由 $\partial_i\Phi^\mu(x)$ 对 x^j 的导数（即二阶导）给出。

（3）$\mathcal{L}_{\Phi(x)}$ 再将由 $\mathrm{d}(j^1\Phi)$ 推送的切向量映射到可积分的 n-形式