D03. 作用量泛函

一、作用量泛函：构造

设：

- X 是一个定向的 n 维光滑流形，表示**独立变量空间**（例如时间轴或时空）；
- $\pi : Y \to X$ 是一个维度为 $n+m$ 的纤维丛，总空间 Y 表示**构型丛**；
- $\Phi : X \to Y$ 是一个光滑截面，表示系统的一个**轨道或演化路径**；
- $j^1\Phi : X \to J^1Y$ 是其一阶 Jet 延拓；
- $\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$ 是一个 **水平 n-形式场**，称为**拉格朗日密度。**

则作用量泛函 S 是如下定义于截面空间 $\Gamma(Y)$ 上的函数：

$$S[\Phi] := \int_X (j^1\Phi)^* \mathcal{L}$$

即：

- 先通过 $j^1\Phi$ 将拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 拉回到底空间 X 上，得到一个 X 上的 n-形式场；
- 然后在定向流形 X 上对该 n-形式场进行积分，得到一个实数。

> $S[\Phi]$ **是一个泛函，其输入为截面** Φ**，输出为实数** $\mathbb{R}$。

二、作用量泛函：数学结构

对象	类型	意义
Φ	$\Phi \in \Gamma(Y)$	一条运动轨迹（系统演化的几何路径）
$j^1\Phi$	$j^1\Phi : X \to J^1Y$	一阶 Jet 延拓（包含速度信息）
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L} \in \Omega^n(J^1Y)$	Jet 丛上的水平 n-形式场（拉格朗日密度）
$(j^1\Phi)^*\mathcal{L}$	$\in \Omega^n(X)$	被拉回到底空间的可积 n-形式
$S[\Phi]$	$\in \mathbb{R}$	一个实值函数，表示给定轨迹的“总作用量”

三、做用量泛函：局部坐标表示

在 ject 丛 J^1Y 上的局部坐标 (x^i, y^μ, y^μ_i) 下，若拉格朗日密度具有如下表达：

$$\mathcal{L} = L(x^i, y^\mu, y^\mu_i)\,\mathrm{d}^n x \quad \text{其中} \quad \mathrm{d}^n x := \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

则其作用量在截面 Φ 下的值为：

$$S[\Phi] = \int_X L(x^i, \Phi^\mu(x), \partial_i \Phi^\mu(x))\,\mathrm{d}^n x$$

这正是物理中常见的“拉格朗日量积分”形式。

四、拉格朗日泛函：几何视角

- 拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 是定义在 Jet 丛 J^1Y 上的水平 n-形式场；
- 通过截面 Φ 的一阶 Jet 延拓 $j^1\Phi$，可以将其拉回到底空间 X；
- 被拉回的形式 $(j^1\Phi)^*\mathcal{L}$ 是 X 上的 n-形式，具有良好协变性与几何不变性；
- 作用量泛函 $S[\Phi]$ 是在流形 X 上对该 n-形式的积分，是具有自然几何意义的实值泛函。

积分对定向流形上 n-形式是自然操作

设 X 是一个 n 维的定向光滑流形，我们关心定义在 X 上的几何对象能否被“自然地”积分出一个实数。下面逐步解释为什么 **积分 n-形式**：

$$\int_X \omega, \quad \omega \in \Omega^n(X), n = \dim(X)$$

是唯一合理且具有几何意义的积分构造

1. n-形式的积分定义只需用到定向光滑流形的结构

- 若 $\omega \in \Omega^n(X)$ 是一个 n-形式场，则可定义积分：

$$\int_X \omega$$

- 这一定义只依赖于：
  - 流形 X 的拓扑结构（保证有坐标图覆盖）；
  - X 的光滑结构（保证微分形式可定义）；
  - X 的定向性（确保不同图中积分方向可统一）；
- 因此这是一个**与坐标无关的几何构造**。

2. 为什么必须是 n-形式才能在 n 维流形上积分

- 微分形式 $\omega \in \Omega^k(X)$ 是 k 阶反对称协变张量场；
- 若 $k < n$：积分维度不足，积分为零（或只能沿 k-维子流形进行）；
- 若 $k > n$：无法对 n 个变量积分出 k 个变量的积，积分不定义；
- **只有 $k = n$，才可以对整个流形 X 进行积分，结果为实数。**

3. 所以：n-形式场是“可积分场”的自然候选

- 对于 n 维定向流形 X，可积几何量必须是 n-形式；
- 若某对象 $\mathcal{L}$ 在 X 上能被积分，则必须先被构造成 X 上的 n-形式场；
- 在作用量语境中，这就是 $(j^1\Phi)^*\mathcal{L}$ 的角色：它是一个真正活在 X 上的 n-形式场，具备被积分的几何结构。

4. 积分操作本身是自然变换

- 在范畴语言中，“积分”是一个从 n-形式丛 $\Omega^n(X)$ 到实数集合 $\mathbb{R}$ 的自然变换：

$$\int_X : \Omega^n(X) \to \mathbb{R}$$

- 它满足如下自然性（naturality）：
  - 对于光滑映射 $f : X' \to X$ 和 n-形式场 $\omega \in \Omega^n(X)$，有：

$$\int_{X'} f^*\omega = \int_X \omega$$

    （若 f 是微分同胚并保向）
- 这表示：积分结果不依赖于具体坐标表示，仅依赖于 n-形式的几何内容与流形结构；
- 因此：将 Jet 丛上的拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 拉回到底流形 X 后进行积分，得到的作用量 $S[\Phi]$ 是具有自然几何意义的实值泛函。