E01. 微分形式，外微分，内积算子

> 本节作为作用量变分结构的几何铺垫，简要回顾微分形式，并介绍外微分与内积算子的定义与结构意义。

一、微分形式

设 M 是一维数为 n 的光滑流形。

- k-形式 ω_p 是一个将 k 个切向量反对称地映射为实数的光滑函数：

$$\omega_p \in \bigwedge^k T_p^* M \quad \Rightarrow \quad \omega \in \Omega^k(M) := \Gamma\left(\bigwedge^k T^* M\right)$$

- 对 k-形式场 $\omega \in \Omega^k(M)$，其几何意义是：每一点 $p \in M$ 上都有一个 k 重反对称协变张量，随 p 光滑变化

I. 微分形式 $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^* M)$

II. 微分形式场 $\omega \in \Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k(T^* M))$

二、外微分 d

I. 直观理解：外微分是定义在“微分形式场”$\omega \in \Omega^k(M)$上的导数算子

> 外微分是定义在 **微分形式场** 上的 **导数算子**，用于建立“变化率”概念，构造闭形式、结构方程、Lie 导数等核心几何对象。

II. 基本定义：外微分是提升微分形式阶数的线性微分算子，满足四条性质

外微分是一个提升阶数的线性算子：

$$\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

作用于 k-形式 ω 后得到 $(k+1)$-形式 $\mathrm{d}\omega$。

它唯一地由下列四条性质刻画：

性质	描述与意义
(1) 线性	$\mathrm{d}(a\omega + b\eta) = a\,\mathrm{d}\omega + b\,\mathrm{d}\eta$ 保证形式空间是线性空间，外微分是线性算子。
(2) Leibniz 规则（反对称乘积）	若 $\omega \in \Omega^k(M)$，$\eta \in \Omega^\ell(M)$，则： $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$ 这是与楔积相容的导数性质。
(3) 幂零性	$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ 所有形式的外微分之后再微分恒为零，这是定义闭形式与上同调的核心结构。
(4) 与函数微分一致	对 $f \in C^\infty(M)$，$\mathrm{d}f$ 是其在 M 上的微分，即： $\mathrm{d}f(v) = v(f)$，其中 $v \in T_pM$。 这是与传统导数一致的起点，确保低阶情况下的一致性。

III. 直观解释

- 外微分是“形式化的导数”，不依赖于坐标系；
- 它将 k-形式推广为 $k+1$-形式，反映出局部几何结构的变化；
- 幂零性意味着没有“更高阶的变化”，从而形成闭形式与上同调结构。

IV. 局部坐标表达与计算规则

> 微分形式虽然具有坐标无关性，但其局部表达（特别是在计算中）依赖于**坐标 1-形式的外积作为基底**。这使得我们可以在局部坐标下计算外微分。

微分形式场的坐标展开：任何 k-形式场的值 ω_p 在点 p 都可以用坐标 1-形式的外积线性组合表达

设 $U \subseteq M$ 是一张局部坐标图，坐标函数为 $(x^1, \dots, x^n)$。则在 U 上：

- 任意 1-形式场可以表示为：

$$\omega = \sum_i f_i(x)\,\mathrm{d}x^i$$

- 任意 k-形式场可以唯一地表示为：

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \dots i_k}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

  其中 $f_{i_1 \dots i_k}(x)$ 是光滑函数。

> 这说明：**任何 k-形式场的值 ω_p 在点 p 都可以用坐标 1-形式的外积线性组合表达。**

外微分的坐标计算规则

由于外微分满足：

- 与函数一致：$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$；
- 与楔积（即外积）满足 Leibniz 规则；
- 与 $\mathrm{d}x^i$ 互相独立，且 $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^i) = 0$；
  因此，外微分的计算归结为两步：

> **只需知道** $\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x^I)$ 的规则即可（其中 f 为函数，$\mathrm{d}x^I$ 是某个有序多指标的坐标 k-形式）：

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}) = \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

（0）对于 0-形式场 f（即 M 上的标量场，即 M 上的光滑函数），外微分与函数微分一致（所谓函数的微分即 $\mathrm{d}f := \partial_i(f)\mathrm{d}x^i$，即满足“函数的微分作用于切向量 = 切向量作用于函数”的微分映射 d）

- 函数的微分 d
  - 定义为这样一种微分映射：
    - 对任意光滑函数 $f\in C^\infty(M)$，其微分 $\mathrm{d}f$ 是一个 1-形式场（即 $\mathrm{d}f\in\Omega^1(M)$）；
    - 在每点 $p\in M$，$\mathrm{d}f_p$ 是一个余切向量，定义为：

$$\mathrm{d}f_p(v) := v(f) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0} \quad \text{其中 } v=\dot\gamma(0)\in T_pM$$

      即 $\mathrm{d}f_p(v)$ 是 f 在 p 点沿切向量 v 的方向导数；
    - 因此，$\mathrm{d}: C^\infty(M)\to\Omega^1(M)$ 是从函数到 1-形式场的自然微分算子
- 外微分的定义要求：外微分作用于 0-形式（即光滑函数）时应等价于该函数的微分

$$\boxed{\text{即：}\quad \mathrm{d}|_{C^\infty(M)} = \mathrm{d}_{\text{func}} : f\mapsto\mathrm{d}f}$$

（1）将被外微分的 k 形式场写作 1-形式外积的线性组合表达 $\omega = f\mathrm{d}x^I$

（2）将展开的光滑函数部分按光滑函数的外微分公式求外微分 $\mathrm{d}f = \partial_i\mathrm{d}x^i$，再与展开基求外积 $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^I$

IV. 结构意义与后续用途

- 结合插入算子 ι_V，外微分构成 Cartan 恒等式：

$$\mathcal{L}_V\omega = \iota_V \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_V\omega$$

这是 Lie 导数的结构基础；
- 在变分理论中，外微分将拉回的形式 $\Psi^*\omega$ 拆分为：
  - **体积项**（$\iota_{\delta\Psi}\mathrm{d}\omega$）
  - **边界项**（$\mathrm{d}\iota_{\delta\Psi}\omega$）
- 这正是 Cartan 型第一变分公式的结构来源。

三、内积算子（插入算子）ι_V

> 内积算子是将 **向量场** 插入微分形式场的第一个槽，从而降低其次数的操作。在变分结构和 Cartan 公式中扮演关键角色。

- 给定 **向量场** $V \in \mathfrak{X}(M)$ 与 k-形式场 $\omega \in \Omega^k(M)$，定义内积（插入）算子：

$$\iota_V : \omega \mapsto \iota_V\omega, \quad \text{使满足 } \iota_V\omega(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \omega(V, v_1, \ldots, v_{k-1}) \quad \in \Omega^{k-1}(M)$$

- 该操作降低形式次数：$\iota_V : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$。
- 插入操作是 Cartan 公式和变分计算中连接向量场与微分形式的桥梁。

I. 插入算子 ι_V：定义

- 设 M 是光滑流形，$V \in \mathfrak{X}(M)$ 是一个光滑向量场；
- $\omega \in \Omega^k(M)$ 是一个 k-形式场；
- **内积算子** $\iota_V : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ 定义为：

$$(\iota_V\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) := \omega(V, v_1, \ldots, v_{k-1})$$

对任意光滑向量场 $v_1, \ldots, v_{k-1}$ 成立。

II. 插入算子 ι_V：性质

性质	描述
降阶	ι_V 使 k-形式场变为 $k-1$ 形式场，作用是“去掉一个槽”
反对称保持	插入后的形式仍是反对称的 $(k-1)$-形式
线性	$\iota_{aV+bW} = a\,\iota_V + b\,\iota_W$
Leibniz 规则（用于 $\omega \wedge \eta$）	若 $\omega \in \Omega^k$，$\eta \in \Omega^\ell$：$\iota_V(\omega \wedge \eta) = (\iota_V\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_V\eta$

性质	描述
幂零	$\iota_V \circ \iota_V = 0$（因为 $\omega(V, V, \ldots) = 0$）

四、微分形式、外微分算子、插入算子的运算关系与自然性

以下是三类算子之间的基本关系：

1. 对任意张量场 V 与 k-形式场 ω：

$$\iota_V \omega = \omega(V, \cdot, \ldots, \cdot) \quad \text{是张量代数定义}$$

2. 外微分与内积满足：

$$\pounds_V \omega := \iota_V \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_V \omega \quad \text{（Cartan 恒等式）}$$

3. 内积不与外积交换，但满足：

$$\iota_V(\omega \wedge \eta) = \iota_V \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_V \eta$$

概念	类型	作用
$\omega \in \Omega^k(M)$	微分形式场	反对称协变张量
d	外微分	升阶，构造闭形式、结构方程
ι_V	插入算子	降阶，插入向量，定义 Lie 导数的成分