E02. Lie 导数

> 本节引入向量场沿 **流** 产生的导数：Lie 导数 $\mathcal{L}$。它在几何变分中刻画“形式沿着变分方向的变化”，是 Cartan 公式与拉回变分公式的关键结构。

一、直观理解：Lie 导数衡量“沿向量场的变化”

> Lie 导数是微分几何中描述“对象如何被一个 **流** 拖动”而发生变化的几何结构。它可以作用在函数、向量场、微分形式场等各种对象上，提供它们**在 V 的场值方向上的变化率场**。

在此我们将讨论限制在微分形式场的Lie导数

I. 向量场产生流：从向量到微分同胚族

直观理解：拖动物体的“动态背景”

设 M 是光滑流形，$V \in \mathfrak{X}(M)$ 是一个光滑向量场。
直观地看，V 为每个点 $p \in M$ 指定了一个“运动方向”。

我们可以将 V 理解为一种“流体速度场”：

- 每个粒子 $p \in M$ 会随着时间 t 沿着 V 的方向移动；
- 移动后的位置由映射 $\phi_t(p)$ 给出，其中 $\phi_t : M \to M$ 是 V 生成的**局部流**。

这些 ϕ_t 构成一个“几何上的动态系统”：每个点在 t 时刻被 ϕ_t 拖动到新位置。

向量场 V 产生的流的定义：从向量到微分同胚族

设 M 是光滑流形，$V \in \mathfrak{X}(M)$ 是一个光滑向量场。我们希望刻画 V 所诱导的“流动结构”。

- 给定任意初始点 $p \in M$，存在穿过 p 的一维积分曲线 $\gamma_p : I_p \to M$，满足：

  $$\gamma_p(0) = p, \quad \dot{\gamma}_p(t) = V(\gamma_p(t))$$

  即 γ_p 是向量场 V 的积分曲线，沿着 V 的方向“流动”。
- 若 V 是完备的，则这些积分曲线可拼接成一个**一参数微分同胚族**：

  $$\phi_t : M \to M, \quad \text{满足：} \quad \phi_0 = \mathrm{id}_M, \quad \frac{d}{dt}\phi_t(p)\Big|_{t=0} = V(p)$$

  此族 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为 V **所生成的流**。

- 对每个固定的 t，ϕ_t 是 M 上的一个微分同胚（若 V 是完备，则为全局微分同胚）；对每个 p，$t \mapsto \phi_t(p)$ 是 V 的积分曲线。

II. 流动下的几何对象（张量场）变化：用拉回形式描述

我们接下来考虑：**一个张量场在流动背景下如何“相对于初始点”变化。**

设 $\omega \in \Omega^k(M)$ 是一个固定的 k-形式场。我们不令 ω 随着 t 变化，而是固定 ω，考察“参考系”随 ϕ_t 演化下所见的 ω。

- 每个 ϕ_t 给出了 M 上的一个微分同胚，因此诱导出一个 k-形式之间的拉回算子：

$$\phi_t^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

  表示“将形式 ω 从 $\phi_t(p)$ 拉回到 p”。
- 所得 $\phi_t^*\omega$ 是 M 上的一族 k-形式场，随着参数 t 的变化而变化，但每一项都是定义在 M 上的。

几何对象（在此我们进讨论微分形式场）关于微分同胚 $\phi : M \to M$ 的拉回

当 $\phi : M \to M$ 是一个微分同胚（如由某个向量场 V 生成的流 ϕ_t），我们可以自然地将张量场、特别是微分形式场沿着 ϕ 拉回。
具体来说：

- 对任意 k-形式场 $\omega \in \Omega^k(M)$，其在点 $p \in M$ 的取值为 $\omega_{\phi(p)} \in \Lambda^k T^*_{\phi(p)}M$；
- 而 ϕ 在切空间上的导数 $T_p\phi : T_pM \to T_{\phi(p)}M$ 诱导出协变的线性映射：

$$(T_p\phi)^{\wedge k} : \Lambda^k T^*_{\phi(p)}M \to \Lambda^k T^*_p M$$

  即：将 k 个向量 $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ 推前为 $T_p\phi(v_1), \ldots, T_p\phi(v_k)$ 后，再用 $\omega_{\phi(p)}$ 作用。

我们有结论：

> 微分形式场的拉回 $\phi^*\omega := \omega \circ (T\phi)^{\wedge k}$

补充：一般几何对象（张量场）关于流形微分同胚的拉回（简要介绍）

类型	T 的类型	拉回规则
向量场	$T \in \Gamma(TM)$	$\phi^*T := \mathrm{d}\phi^{-1} \circ T \circ \phi$（*不常见*）
1-形式	$T \in \Gamma(T^*M)$	$\phi^*\alpha_p(v) := \alpha_{\phi(p)}(\mathrm{d}\phi_p(v))$
$(0,k)$-张量（如微分形式）	$T \in \Omega^k(M)$	拉回由 $(T\phi)^{\wedge k}$ 诱导，简化为形式拉回
$(r,0)$-张量（全反变）	使用 $\mathrm{d}\phi_p^{-1}$ 在每个分量上作用	

类型	T 的类型	拉回规则
(r, s)-张量	混合使用 ϕ_* 与 $\mathrm{d}\phi$，如上主公式所示	

我们简单概括流形 M 上的几何对象关于微分（自）同胚 $\phi : M \to M$ 的拉回的几何意义和结构性质

1. **几何意义**：
   - 拉回操作 ϕ^*T 描述的是：将 $\phi(M)$ 上的张量 T “重定位”到 M 上，使得其几何结构在 ϕ 下保持不变；
   - 如果 T 描述的是某种物理量（如应力、场强等），则 ϕ^*T 表示“固定参考系观察流动场”的等效表达。
2. **结构性质**：
   - ϕ^* 保持张量类型不变；
   - ϕ^* 是张量代数上的同态，即：

   $$\phi^*(T \otimes S) = \phi^*T \otimes \phi^*S$$

   - 若 ϕ 是微分同胚，则 ϕ^* 是张量场空间的自同构；
   - 对微分形式 ω，拉回满足：

   $$\phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\phi^*\omega)$$

   这是微分结构自然性的表现。

III. Lie 导数：几何对象（场）沿（向量场诱导的）流拉回后的变化率

正式地，我们定义 k 形式场沿向量场 V 的Lie导数为：

$$\boxed{\pounds_V\omega := \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega\Big|_{t=0}}$$

即：Lie 导数是**微分形式沿流拉回后的变化率**。

二、 k 形式场的 Lie 导数： Cartan 表达式 $\pounds_V\omega = \iota_V\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_V\omega$

在上一节中我们看到，Lie 导数的定义依赖于沿流 ϕ_t 的拉回导数：

$$
\pounds_V\omega := \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega\bigg|_{t=0}
$$

但这需要显式构造流 ϕ_t，在理论上不够普适。

我们现在给出 Lie 导数更具结构意义的定义——**Cartan 表达式**，它仅依赖于：

- 向量场 $V \in \mathfrak{X}(M)$；
- 外微分算子 d；
- 插入算子（内积）ι_V。
  值得注意的是，该表达式仅适用于 **微分形式场** 这一几何对象，对于一般的张量场并不适用

I. Lie 导数的 Cartan 表达式定义

对任意微分形式场 $\omega \in \Omega^k(M)$，定义：

$$
\boxed{\pounds_V\omega := \iota_V\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_V\omega}
$$

此定义称为 **Cartan 恒等式**，它直接定义了 V 对形式 ω 的 Lie 导数，而不依赖于流

II. Cartan 表达式中各项的几何含义

项目	几何含义
ι_V	内积算子：把 V 插入形式中第一个变量中，降低次数 $k \to k-1$
$\mathrm{d}\omega$	形式的外微分，提升次数 $k \to k+1$
$\iota_V\mathrm{d}\omega$	表示“V 对 ω 的微分行为的投影”
$\mathrm{d}\iota_V\omega$	表示“插入 V 后再对结果的变化率”
$\pounds_V\omega$	综合这两项，描述“V 拖动 ω 时 ω 的瞬时变化率”

III. 与流拉回定义的一致性

当 V 是完备向量场，且 ϕ_t 是其诱导的流，对于形式场 ω 的 Lie 导数，两种定义是等价的：

$$
\pounds_V\omega = \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega\bigg|_{t=0} = \iota_V\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_V\omega
$$

这说明 **Cartan 表达式不仅定义了形式场的 Lie 导数，还揭示了其结构公式。**

IV. Cartan 恒等式的意义

符号	作用
$\iota_V \mathrm{d}\omega$	先对 ω 求外微分，再插入 V：强调“整体结构的卷曲沿 V 的投影”
$\mathrm{d}\iota_V \omega$	先插入 V，再取微分：强调“切片形式在 M 上的扩张”

> 二者加起来就是“ω 随着 V 的流同时变化 + 被拖动”的整体变化。

该表达式不依赖于具体流 ϕ_t 的存在，因此适用于局部定义、形式计算与无穷维空间。

V. 运算性质

性质	表达式
线性	$\pounds_{aV+bW} = a\,\pounds_V + b\,\pounds_W$
Leibniz 对楔积	$\pounds_V(\omega \wedge \eta) = (\pounds_V \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\pounds_V \eta)$
与外微分可交换	$\pounds_V \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \pounds_V$（因为 $\mathrm{d}^2 = 0$）

VI. 举例（坐标计算）

设 $M = \mathbb{R}^3$，$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$，$\omega = x\,\mathrm{d}y$，则：

- $\iota_V \omega = x \cdot V^y = x \cdot x = x^2$；
- $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$；
- $\iota_V \mathrm{d}\omega = \iota_V(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = V^x \mathrm{d}y - V^y \mathrm{d}x = (-y)\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x$；
- 故 $\pounds_V \omega = \iota_V \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_V \omega = (-y)\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}(x^2) = -x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + 2x\,\mathrm{d}x = (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y)$。
