E02X. 流形上一般几何对象拉回和推前

一、切映射，向量场的推前

I. 流形间光滑映射 $\Phi : M \to N$ 诱导切映射 $T\Phi : TM \to TN$

切映射的性质定义式：$T_p\Phi(v_p)[f] = v_p[f \circ \Phi]\ \forall f \in C^\infty(N)$

切映射可以被逐纤维定义 $T_p\Phi : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$

II. 切向量的推前 $\Phi_* v_p := T_p\Phi(v_p)$

（1）切向量推前 Φ_* 的性质定义式：$\Phi_*(v_p)[f] = v_p[f \circ \Phi]\ \forall f \in C^\infty(N)$

（2）该定义说明：切向量推前实际上就是切映射对切向量的作用结果 $\Phi_* v_p := T_p\Phi(v_p)$

（3）切向量推前的坐标表示：用坐标基向量的推前说明

设 M 上有坐标图 $(x^1, \ldots, x^n)$，点 p 的局部坐标为 $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$，
Φ 在坐标表示下给出：

$$\Phi(x^1, \ldots, x^n) = (y^1(x), \ldots, y^n(x))$$

其中每个 y^j 是 x^i 的光滑函数。则坐标基向量的推前为：

$$\boxed{T_p\Phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\Phi(p)}}$$

也就是说，切映射在坐标基下由雅可比矩阵 $J = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)$ 实现。

将切向量视为切空间上的点 $v_p \in T_pM$，则（切向量的）推前映射是切空间间的映射：$\Phi_* : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$

III. 向量场的推前 $\Phi_* V$ 的定义：通过切映射定义 $\Phi_* V := T\Phi \circ V \circ \Phi^{-1}$

（1）向量场推前的性质定义式：$(\Phi_* V)_{\Phi(p)}[f] = V_p[f \circ \Phi]$

（2）该定义说明：切向量场的推前，实际上就是切映射逐点作用于向量场在该点的取值的结果 $(\Phi_* V)_{\Phi(p)} := T_p\Phi(V_p)$

将向量场视为切丛的一个截面 $V \in \Gamma(TM) =: \mathfrak{X}(M)$，则（向量场的）推前映射是截面空间间的映射： $\Phi_* : \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$

二、余切映射，余切向量场的拉回

I. 流形间的光滑映射 $\Phi : M \to N$ 诱导余切映射 $T^*\Phi : T^*N \to T^*M$

余切映射的定义性质： $T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha_{\Phi(p)})[v_p] = \alpha_{\Phi(p)}[T_p\Phi(v_p)]$

余切映射可以被逐纤维定义： $T^*_{\Phi(p)}\Phi : T^*_{\Phi(p)}N \to T^*_p(M)$

II. 余切向量（1-形式）的拉回：$\Phi^*\alpha_{\Phi(p)} := T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha_{\Phi(p)})$

（1）1-形式拉回的性质定义式： $\Phi^*(\alpha_{\Phi(p)})[v_p] = \alpha_{\Phi(p)}[T_p\Phi(v_p)]\ \forall v_p \in T_pM$

（2）该定义说明：余切向量拉回实际上就是余切映射对余切向量的作用结果 $\Phi^*\alpha_{\Phi(p)} := T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha_{\Phi(p)})$

（3）1-形式拉回的坐标表示：用坐标 1-形式（基）的拉回说明

$$\boxed{T^*_{\Phi(p)}\Phi\left(\mathrm{d}y^j\right) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p \cdot \mathrm{d}x^i}$$

将 1-形式视为余切空间上的点，则（余切向量的）拉回是余切空间间的映射： $\Phi^* : T^*_{\Phi(p)}N \to T^*_pM$

III. 1-形式场拉回的定义：通过余切映射定义：$\Phi^*\omega := T^*\Phi \circ \omega \circ \Phi$

（1）1-形式场拉回的性质定义式： $(\Phi^*\omega)_p[v_p] = \omega_{\Phi(p)}[\Phi_* v_p]$

（2）该定义说明：1-形式场的拉回，实际上就是余切映射逐点 作用于1-形式场在该点的取值的结果 $(\Phi^*\omega)_p := T^*_{\Phi(p)}(\omega_{\Phi(p)})$

将余切向量场视为余切丛的一个截面 $\omega \in \Gamma(T^*N) =: \Omega(N)$，则（向量场的）推前映射是截面空间间的映射： $\Phi_* : \Gamma(T^*N) \to \Gamma(T^*M)$

三、逻辑顺序梳理：函数的拉回-切映射（-切向量的推前）-余切映射（-1-形式的拉回）

在前文的两节中，我们采取的定义顺序是按照以下逻辑：

- 使用“光滑丛间光滑映射诱导切映射”的思路定义了流形间光滑映射 $\Phi: M \to N$ 在流形的切丛上诱导的**切映射** $T\Phi: TM \to TN$，定义性质要求切映射满足**局部表达式** $T_p\Phi(v)[f] = v[f \circ \Phi]$
- 然后定义流形上任意 **切向量** v **的推前** $\Phi_*: T_pM \to T_{\Phi(p)}N$； 要求满足 $\Phi_* v[f] = v[f \circ \Phi]$
  - 但是 $v[f \circ \Phi] =: T_p\Phi(v)[f]$
  - 因此 $\Phi_* v = T_p\Phi(v), \quad v \in T_pM$；换言之 **切向量的推前** 和 **（局部）切映射作用于切向量** 本质上是同一回事
    - 如果（合理地）将切向量和推前后的切向量都视为（流形上光滑函数的）泛函，则 **推前后的切向量作为泛函** 可以写作复合函数形式 $\Phi_* v := v \circ \Phi^*$， 其中 Φ^* 是定义在 $C^\infty(N)$ 上的拉回映射
    - 如果（非正式地）将切向量和推前后的切向量都视为（流形上1-形式的）泛函，则 **推前后的切向量作为泛函** 可以写作复合函数形式 $\Phi_* v := v \circ T^*_{\Phi(p)}\Phi = v \circ \Phi^*$； 其中$\Phi^*$ 和局部余切映射 $T^*_{\Phi(p)}\Phi$ 都是1-形式的拉回，即定义在 $T^*_{\Phi(p)}N$ 上的拉回映射
  - 再**切向量**的推前的基础上定义 **向量场的推前** $\Phi_* V$：要求满足局部表达式 $(\Phi_* V)_{\Phi(p)}[f] = V_p[f \circ \Phi]$
    - 但是 $V_p[f \circ \Phi] =: T_p\Phi(V_p)[f]$
    - 因此 $(\Phi_* V)_{\Phi(p)} = T_p\Phi(V_p)$；换言之 **切向量场的推前** 和 **（局部）切映射作用于向量场在局部的场值** 本质上是同一回事
    - 并且，**向量场的推前映射** $\Phi_*: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ 是截面空间间的映射（因为向量场可以视为切丛的截面）$\Phi_*: \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$，其对具体向量场作用效果可以写作复合函数形式：$\Phi_* V = T\Phi \circ V \circ \Phi^{-1}$
- 然后利用 **切映射** 定义 **余切映射** $T^*\Phi: T^*N \to T^*M$ 为其对偶结构，即要求满足 **局部表达式** $T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha)[v] = \alpha[T_p\Phi(v)]$
- 同理，利用 **切向量的推前** 定义 **余切向量的拉回** $\Phi^*: T^*_{\Phi(p)}N \to T^*_pM$ 为其对偶结构，即要求满足 $\Phi^*\alpha[v] = \alpha[\Phi_* v]$
  - 但是 $\alpha[\Phi_* v] = \alpha[T_p\Phi(v)] = T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha)[v]$
  - 因此 $\Phi^*\alpha[v] = T^*_{\Phi(p)}\Phi(\alpha)[v]$；换言之 **1-形式的拉回** 和 **（局部）余切映射作用于1-形式** 本质上是同一回事
    - 如果（合理地）将1-形式和拉回后的1-形式都视为（流形上切向量的）泛函，则 **拉回后的1-形式作为泛函** 可以写作复合函数形式 $\Phi^*\alpha = \alpha \circ T_p\Phi = \alpha \circ \Phi_*$，其中 Φ_* 和局部切映射 $T_p\Phi$ 都是切向量的推前，即定义在 T_pM 上的推前映射
  - 再在 **1-形式** 的拉回的基础上定义 **1-形式场的拉回** $\Phi^*\omega$： 要求满足局部表达式 $(\Phi^*\omega)_p[v] = \omega_p[\Phi_* v]$
    - 但是 $\omega_p[\Phi_* v] = \omega_p[T_p\Phi(v)] = T^*_{\Phi(p)}\Phi(\omega_p)[v]$
    - 因此 $(\Phi^*\omega)_p = T^*_{\Phi(p)}\Phi(\omega_p)$；换言之 **1-形式场的拉回** 和 **（局部）余切映射作用于1-形式场的局部场值** 本质上是同一回事
    - 并且，**1-形式场的拉回映射** $\Phi^*: \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$ 也是截面空间间的映射（1-形式场可以视为余切丛的截面）$\Phi^*: \Gamma(T^*N \to T^*M)$，其对具体1-形式场的作用效果可以写成复合函数形式：$\Phi^*\omega = T^*\Phi \circ \omega \circ \Phi$

在此整理复合函数形式的几个公式：

$$\text{推前后的切向量：}\ \boxed{\Phi_* v := v\circ\Phi^*},\boxed{\Phi_* v := v\circ T^*_{\Phi(p)}\Phi = v\circ\Phi^*}\quad ,$$

$$\text{推前后的切向量场：}\ \boxed{\Phi_* V = T\Phi\circ V\circ\Phi^{-1}}\quad ;$$

$$\text{拉回后的1-形式：}\ \boxed{\Phi^*\alpha = \alpha\circ T_p\Phi = \alpha\circ\Phi_*}\quad ,$$

$$\text{拉回后的1-形式场：}\ \boxed{\Phi^*\omega = T^*\Phi\circ\omega\circ\Phi}\quad .$$

以及切向量的推前/1-形式的拉回的局部定义表达式：

$$\boxed{(\Phi_* V)_{\Phi(p)}[f] = V_p[f\circ\Phi]},\boxed{(\Phi_* V)_{\Phi(p)} = T_p\Phi(V_p)}\quad ;$$

$$\boxed{(\Phi^*\omega)_p[v] = \omega_p[\Phi_* v]},\boxed{(\Phi^*\omega)_p = T^*_{\Phi(p)}\Phi(\omega_p)}\quad .$$

四、切向量的拉回，余切向量的推前

I. 切向量的拉回，切向量场的拉回

切向量的拉回 $\Phi^* w := (\Phi^{-1})_* w$

切向量场的拉回 $\Phi^* W := (\Phi^{-1})_* W$

设 $\Phi : M\to N$ 是一个**微分同胚**，即存在光滑逆映射 $\Phi^{-1} : N\to M$，则我们可以定义 N 上向量场 $W\in\mathfrak{X}(N)$ 沿 Φ 的**拉回**为：

$$\boxed{\Phi^* W := (\Phi^{-1})_* W = T(\Phi^{-1})\circ W\circ\Phi}$$

其中第一个等号定义了切向量场的拉回，第二个等号是来自切向量场推前的定义

II. 余切向量的推前，余切向量场的推前

余切向量的推前 $\Phi_*\beta := (\Phi^{-1})_*\alpha$

余切向量场的推前 $\Phi_*\gamma := (\Phi^{-1})^*\gamma$

类似地，设 $\gamma\in\Omega^1(M)$ 是定义在 M 上的 1-形式场，我们可以定义它沿 Φ 的**推前**为：

$$\boxed{\Phi_*\gamma := (\Phi^{-1})^*\gamma = T^*\Phi^{-1}\circ\gamma\circ\Phi}$$

五、任意张量场的拉回

一个张量场 $T\in\Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M)$ 是一个 (r,s) 型张量：接受 s 个向量和 r 个 1-形式为输入，返回标量。

设 $\phi: M \to M$ 为微分同胚，张量场关于其的拉回定义为：

> **定义**：ϕ^*T 是使得如下恒等式成立的唯一张量场：
>
> $$\boxed{(\phi^*T)_p(v_1,\dots,v_s;\alpha^1,\dots,\alpha^r) = T_{\phi(p)}(T_p\phi(v_1),\dots,T_p\phi(v_s);T_p^*\phi(\alpha^1),\dots,T_p^*\phi(\alpha^r))}$$

也就是说，**张量场的拉回** ϕ^*T 作用于一组切向量和余切向量，等价于：

- 将向量输入项 v_i 推前至 $\phi(p)$；
- 将 1-形式输入项 α^j 拉回至 $\phi(p)$；
- 在 $\phi(p)$ 处由 T 给出结果。

六、拉回算子的结构性质

设 $\Phi: M \to N$ 是一个微分同胚（diffeomorphism），我们总结它诱导的拉回 Φ^* 在几何对象上的重要结构性质。

I. 张量积结构的自然性

拉回 Φ^* 是张量代数上的**代数同态**，即满足：

$$\boxed{\Phi^*(T \otimes S) = \Phi^*T \otimes \Phi^*S}$$

此外也满足：

- 作用于函数的拉回 $\Phi^*f = f \circ \Phi$；
- 对任意自然张量运算（例如对称、外积、收缩等）都有：

$$\boxed{\Phi^*(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(\Phi^*T)}$$

这使得拉回成为张量代数中的**函子性操作**，并保持各类张量操作结构的自然一致性。

拉回是张量代数中的”函子性操作“，并保持各类张量操作结构的自然一致性

II. 类型保持（Type Preservation）

对于任意张量场 $T \in \Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M)$，其拉回 Φ^*T 仍然是一个 (r,s) 型张量场：

$$T \in \Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M) \quad \Longrightarrow \quad \Phi^*T \in \Gamma(\mathcal{T}^{(r,s)}M)$$

> 这意味着拉回不会改变张量的“输入结构”：接受 s 个向量，r 个 1-形式。

II. 张量积与对称性保持（Compatibility with Tensor Operations）

拉回与张量代数中的基本结构运算相容：

（1）张量积保持

$$\boxed{\Phi^*(T \otimes S) = \Phi^* T \otimes \Phi^* S}$$

（2）对称性与反对称性保持

若张量 T 在某些指标上对称或反对称，则其拉回 $\Phi^* T$ 在对应指标上具有相同性质。
例如：

- 微分形式是全反对称 $(0, k)$ 张量，其拉回仍是全反对称的 k-形式；
- 对称张量的拉回仍保持对称性。

换言之：拉回 Φ^* 是一个张量代数上的同态

III. 外微分与拉回的交换性（For Differential Forms）

对于任意 k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$，拉回与外微分 d 交换：

$$\boxed{\Phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\Phi^*\omega)}$$

证明思路：

- 利用外微分的局部定义（基于 C^∞ 函数与 1-形式），结合拉回在函数与 1-形式上的定义；
- 结构上源于外微分的自然性（functoriality）；
- 实质上说明：d 是自然变换，故与光滑映射拉回交换。

> 这是微分几何中极其重要的结构性质，使得“形式的变化结构”在光滑变换下保持一致性。

IV. 自同构性质（当 Φ 为微分自同胚）

若 $\Phi : M \to M$ 是微分自同胚，即 Φ 可逆且 Φ^{-1} 也是光滑的，则拉回算子 Φ^* 是张量场空间上的**自同构**，满足：

- 可逆性：

$$\boxed{(\Phi^{-1})^* \circ \Phi^* = \mathrm{id}, \quad \Phi^* \circ (\Phi^{-1})^* = \mathrm{id}}$$

- 在各类张量空间上均为线性同构映射；
- 保持张量类型与代数结构。

> **结论**：由流形
> 自同胚诱导的拉回操作在微分形成张量空间的自同构，为构造“等价几何结构”提供基础。